

Installation de production et de distribution d'eau

I Pertes de charge dans les conduites

I.A.1.1. *Fluide en écoulement homogène incompressible laminaire*

I.A.1.a. Écoulement parfait: écoulement sans effet dû à la viscosité ni à la diffusion thermique.
Écoulement homogène incompressible: les grandeurs macroscopiques qui décrivent le fluide ne dépendent pas du point d'observation; notamment la masse volumique est la même en tout point.
Stationnaire: indépendant du temps

I.A.1.b. Pour un système ouvert en écoulement stationnaire, le premier principe de la thermodynamique s'écrit $\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = q + w_{\text{autres forces que pression}}$ entre deux points d'un tube de courant. Entre deux points d'un écoulement parfait, il n'y a ni chaleur massique échangée q , ni travail massique dû à d'autres forces que celles de pression.

En notant $e_c = \frac{1}{2}v^2$ l'énergie cinétique massique, $e_p = gz$ l'énergie potentielle massique de pesanteur, $h = u + \frac{P}{\rho}$ l'enthalpie massique avec u l'énergie interne massique, on obtient donc

$$\Delta \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz \right) = 0.$$

Compte tenu de l'hypothèse d'un fluide parfait, l'énergie interne massique ne varie pas. Avec de plus l'hypothèse de l'écoulement homogène incompressible, on passe aux grandeurs volumiques en multipliant par ρ et on en déduit la relation de Bernoulli: l'énergie totale volumique du fluide

$$e_T = \rho gz + P + \frac{1}{2}\rho v^2 \text{ est uniforme le long d'une ligne de courant.}$$

En divisant par ρg , on obtient $H = \frac{e_T}{\rho g} = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{1}{2g}v^2$ uniforme le long d'une ligne de courant.

I.A.1.c. L'hypothèse d'un écoulement parfait ne peut être valide près des parois dans un écoulement laminaire d'un fluide réel, car la vitesse doit s'y annuler à cause de la viscosité.

I.A.1.d. Dans le cas d'un écoulement permanent d'un fluide incompressible réel, e_T diminue le long de l'écoulement à cause du travail des forces de viscosité. Donc entre deux points A et B

$$\text{d'une ligne de courant, } e_T(B) - e_T(A) = \int_A^B \vec{f}_{\text{visc}} \cdot d\vec{\ell} \leq 0.$$

$$\text{I.A.1.e. On en déduit donc } H(B) - H(A) = \int_A^B \frac{\vec{f}_{\text{visc}}}{\rho g} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \frac{\eta \Delta \vec{v}}{\rho g} \cdot d\vec{\ell} \leq 0.$$

La perte de charge $H(A) - H(B)$ est donc bien positive (ou nulle en absence de viscosité).

I.A.2.a. On considère un tube de champ de section dS et de longueur dx . A cause de l'hypothèse stationnaire, le champ $\rho \vec{v}$ est à flux conservatif. Comme de plus on suppose l'incompressibilité du fluide, le champ de vitesse est à flux conservatif. D'où $v(r, x+dx)\vec{e}_x = v(r, x)\vec{e}_x$, c'est-à-dire $v(r, x)$ ne dépend pas de x .

I.A.2.b. On suppose $\frac{\partial H}{\partial x} = -a$. D'après la question I.A.1.e, on déduit $\frac{\partial H}{\partial x} = -a = \frac{\eta \Delta v}{\rho g}$.

D'où $\frac{\eta}{\rho g r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -a$, soit encore $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{-a \rho g r}{\eta}$ que l'on intègre entre 0 et r:

$r \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-a \rho g r^2}{2\eta}$ soit $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-a \rho g r}{2\eta}$ que l'on intègre cette fois entre r et r_0 .

$v(r_0) - v(r) = -v(r) = \frac{a \rho g}{4\eta} (r^2 - r_0^2)$. On en déduit $v(r) = \frac{a \rho g}{4\eta} (r_0^2 - r^2) = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$ avec $v_{\max} = \frac{a \rho g r_0^2}{4\eta}$.

I.A.2.c. La vitesse débitante est la vitesse moyenne calculée sur une section:

$$U = \frac{1}{\pi_0^2} \iint_{\text{section}} v(r) r d\theta dr = \frac{1}{\pi_0^2} \int_0^{r_0} 2\pi v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) r dr \text{ soit après simplification } U = \frac{1}{2} v_{\max}.$$

De $Q = U \pi_0^2 = \frac{1}{2} v_{\max} \pi_0^2$ on déduit donc $v(r) = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) = \frac{2Q}{\pi_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$.

I.A.2.d. Pour un débit de 30 L s^{-1} et un diamètre de 20cm, $U = \frac{Q}{\pi_0^2} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 10^{-2}} = 0,95 \text{ m s}^{-1}$.

De $v_{\max} = \frac{a \rho g r_0^2}{4\eta}$ on déduit la perte de charge linéique $a = \frac{8\eta U}{\rho g r_0^2} = \frac{32\eta U}{\rho g D^2}$

- Cas de l'huile:

- A.N pour l'huile: $a = 1,5 \cdot 10^{-2}$; d'où une surpression nécessaire $\Delta P = \rho g \Delta H = \rho g a L = 6,5 \cdot 10^3 \text{ Pa}$
- Nombre de Reynolds: $Re = \frac{\rho D U}{\eta} = 990 \approx 10^3 < 2300$ compatible avec un écoulement laminaire.

- Cas de l'eau.

- Nombre de Reynolds: $Re = \frac{\rho D U}{\eta} = 1,9 \cdot 10^5 \gg 2300$. L'écoulement de l'eau est turbulent.

I.B Fluide visqueux homogène incompressible en régime turbulent

I.B.1.a. On s'intéresse à la puissance cinétique, ou débit d'énergie cinétique massique:

$$P_c = \iint_{\text{Section}} \frac{1}{2} \rho v^2(r) \cdot v(r) dS = \iint_{\text{Section}} \frac{1}{2} \rho v^3(r) \cdot dS \text{ et pour un écoulement uniforme:}$$

$$P_{c \text{ uniforme}} = \iint_{\text{Section}} \frac{1}{2} \rho U^3 \cdot dS \quad \text{D'où } \alpha = \frac{P_c}{P_{c \text{ uniforme}}} = \frac{1}{U^3} \iint_{\text{Section}} v^3(r) \cdot dS$$

I.B.1.b. D'après la définition de la charge moyenne et du coefficient de Coriolis:

$$\begin{aligned} Q \bar{H}(x) &= \iint_{Section} H(x,r).v(r).dS = \iint_{Section} \left(z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2(r)}{2g} \right).v(r).dS = \iint_{Section} \left(z + \frac{P}{\rho g} \right).v(r).dS + \iint_{Section} \frac{v^3(r)}{2g}.dS \\ &= \left(z + \frac{P}{\rho g} \right) Q + \frac{1}{2g} \iint_{Section} v^3(r).dS = \left(z + \frac{P}{\rho g} \right) Q + \frac{1}{2g} \alpha U^3 S = \left(z + \frac{P}{\rho g} + \frac{\alpha U^2}{2g} \right) Q \end{aligned}$$

donc $\bar{H}(x) = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{\alpha U^2}{2g}$.

I.B.1.c. Pour un écoulement uniforme $v(r)=U$ donc $\alpha_{uniforme}=1$.

Pour l'écoulement de Poiseuille cylindrique $\alpha = \frac{1}{U^3 S} \iint_{Section} v^3(r).dS = \frac{1}{U^3 S} \int_0^{r_0} 8U^3 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)^3 .2\pi r dr$

$$\alpha = \frac{8}{S} \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)^3 .2\pi r dr = \frac{8}{S} \pi r_0^2 \left[\frac{-1}{4} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)^4 \right]_0^{r_0} = 2$$

I.B.1.d. Dans le cas de régimes turbulents α est entre 1,05 et 1,20 ce qui se rapproche d'un écoulement uniforme, c'est-à-dire de ce que l'on aurait avec un fluide parfait.

I.B.2.a. Pour un écoulement de Poiseuille, en utilisant la perte de charge linéique α : $\Delta \bar{H}_\ell = \alpha L$

or $\alpha = \frac{32\eta U}{\rho g D^2}$ donc $\Delta \bar{H}_\ell = \frac{32\eta U L}{\rho g D^2}$.

En identifiant avec l'expression générale $\Delta \bar{H}_\ell = f \frac{L U^2}{D 2g}$ on obtient $f = \frac{64\eta}{\rho U D} = \frac{64}{Re}$.

I.B.2.b. Lecture sur le diagramme de Moody:

$D=0,2m$ $L=8345m$ $Q=30 \cdot 10^{-3} m^3 s^{-1}$ $\nu = \frac{\eta}{\rho} = 10^{-6} m^2 s^{-1}$ $Re=1,9 \cdot 10^5$

On lit le facteur de friction f en cherchant l'ordonnée sur l'axe vertical de gauche du point de la courbe d'étiquette $r = \epsilon/D$ à l'abscisse Re .

| Fonte | Relative roughness ϵ/D | friction factor | $\Delta \bar{H}_\ell = f \frac{L U^2}{D 2g}$ |
|-------------|---------------------------------|--------------------------|--|
| F1 Neuve | $0,4/200=2 \cdot 10^{-3}$ | $f_1=2,45 \cdot 10^{-2}$ | 47,5m |
| F2 Corrodée | $1,2/200=6 \cdot 10^{-3}$ | $f_2=3,25 \cdot 10^{-2}$ | 63 m |
| F3 Déposée | $1,6/200=8 \cdot 10^{-3}$ | $f_3=3,55 \cdot 10^{-2}$ | 69 m |

I.B.3. Pour un coude de rayon 1,5m tournant à 90°, $K=0,2$ soit une perte de charge singulière

$\Delta \bar{H}_S = K \frac{U^2}{2g} = 9,3 \cdot 10^{-3} m$ or la perte de charge linéique est $\Delta \bar{H}_\ell / L = 5,7 \cdot 10^{-3} m$ pour la fonte neuve.

La perte singulière de ce coude est donc équivalente à 1,6 m de fonte neuve.

A titre de comparaison, un clapet anti-retour ($K=70$) correspond à une perte de charge de 3,25m soit l'équivalent de $3,25 \frac{8345}{47,5} = 570m$. C'est cohérent avec ce que donne l'énoncé en citant l'équivalent de plus de 500m.

II Point de fonctionnement hydraulique d'une installation

II.A Caractéristiques hydrauliques d'une pompe hydraulique

II.A.1. La puissance hydraulique de la pompe s'écrit $P_h = \rho g H_m Q_p$.

Q_p est le débit volumique de la pompe en m^3s^{-1} . Le terme $\rho g H_m$ homogène à une variation d'énergie potentielle volumique correspond à la variation d'énergie totale volumique e_T du fluide qui traverse la pompe. Ceci est donc conforme au premier principe "industriel" pour un fluide incompressible en écoulement permanent.

II.A.2. Pour le point de fonctionnement envisagé, le débit Q est 237USgpm soit avec le facteur de conversion fourni $Q=15L.s^{-1}$. On lit une hauteur manométrique $H_{mt}=1080 ft = 329,4m$. On en déduit la puissance hydraulique à l'aide de la question précédente:

$$P_h = 1000 \times 9,81 \times 329,4 \times 0,015 = 48,5kW.$$

Le rendement indique sur la première colonne en bas de la figure 2 est 68,3%, cohérent avec ce que l'on mesure sur l'axe de droite à l'abscisse 237USgpm.

On en déduit la puissance mécanique à fournir à l'axe de la pompe $P_m = 48,5kW / 0,683 = 71kW$.

Si on utilise directement les informations de la colonne de gauche figure 2:

Hydraulic power = $P_h = 63,7hp = 63,7 * 93,2 / 125 = 47,5kW$ C'est cohérent à 2% près.

De même: Rated Power = $P_m = 93,3hp = 93,3 * 93,2 / 125 = 70kW$. Cette puissance peut être lue sur le graphe du haut de la figure 2.

II.B Point de fonctionnement hydraulique et consommation électrique

II.B.1. Un débit de $30L.s^{-1}$ correspond à 475USgpm hors du graphe de la figure 2. Or le débit optimal de la pompe est voisin de 15 à $16L.s^{-1}$.

Pour obtenir un débit de $30L.s^{-1}$ avec un bon rendement énergétique il faut donc utiliser deux pompes en parallèle.

II.B.2. L'alimentation souhaitée comprend un dénivelé Δz de $727-502=265m$, auquel il faut ajouter la perte de charge régulière (homogène à un dénivelé) qui dépend de l'état de la fonte. A partir de $H_{mt} = \overline{\Delta H}_\ell + \Delta z$ on peut lire et exploiter les différents points de fonctionnement.

N.B. Avec la fonte corrodée on retrouve le point de fonctionnement F qui est le débit souhaité: $2600m^3/jour = 30,06L.s^{-1}$ soit $15, L.s^{-1}$ pour chacune des deux pompes en parallèle.

| Fonte | $\overline{\Delta H}_\ell$ | $H_{mt} = \overline{\Delta H}_\ell + 265m$ | $H_{mt}(ft)$ | Débit Q | P_h calculée | R | P_m calculée = P_h / R |
|----------|----------------------------|--|--------------|------------------------------|----------------|-------|----------------------------|
| neuve | 47,5m | 312,5 m | 1025 | 260USgpm = $16,4L.s^{-1}$ | 50kW | 69% | 72kW |
| corrodée | 63 m | 328 m | 1075 | 237USgpm = $15L.s^{-1}$ | 48kW | 68,3% | 70kW |
| déposée | 69 m | 334 m | 1095 | 230USgpm = $14,5L.s^{-1}$ | 47,5kW | 68% | 70kW |

II.B.3. On complète les calculs précédents pour déduire la puissance électrique consommée à l'aide du rendement 80% du moteur asynchrone.

| Fonte | P_m calculée | R | P_{elec} calculée $= P_m / R$ |
|----------|-------------------|-----|------------------------------------|
| neuve | 72kW | 80% | 90kW |
| corrodée | 70kW | 80% | 88kW |
| déposée | 70kW | 80% | 87kW |

Le vieillissement de la fonte s'accompagne d'une augmentation de la hauteur manométrique totale et d'une diminution du débit. Ces deux variations sont antagonistes mais la puissance consommée diminue légèrement. Le rendement énergétique global P_h / P_{elec} passe de 55% à 54%. En cas de forte dégradation, le débit des deux pompes en parallèle n'est plus suffisant pour répondre au cahier des charges, même avec un fonctionnement "non stop".

II.B.4. La vitesse de rotation des pompes est au point de fonctionnement F de 3200rpm soit 3200 tours par minute, ou encore $3200 * 2\pi / 60 = 335 \text{ rad.s}^{-1}$. Pour une puissance mécanique de 70kW, cela correspond à un couple $C = 70 \cdot 10^3 / 335 = 210 \text{ Nm}$.

Il faut donc utiliser un moteur qui peut fournir au moins ce couple à 3200tr/mn, c'est-à-dire le moteur portant le numéro 9 (couple le plus élevé). Son rendement à 3200tr/mn est entre 96,5% et 96,7%, d'où une puissance électrique consommée d'environ 72,5kW pour ce moteur synchrone au lieu de 88kW pour le moteur asynchrone.

III Remplacement des moteurs asynchrones par des moteurs synchrones à aimants permanents. Evaluation du couple

III.A Champ magnétique rotorique

III.A.1. Dans le milieu magnétique constituant le rotor, le champ magnétique \vec{B}_r , le champ excitation magnétique \vec{H}_r , et l'aimantation \vec{M}_r sont liés par la relation $\vec{B}_r = \mu_0 (\vec{H}_r + \vec{M}_r)$.

III.A.2. On constate que $e = 3 \text{ mm} \ll a = 150 \text{ mm}$. Donc $x_e = \frac{e}{a} \ll 1$ négligeable devant 1, de même que $\frac{a}{r} \approx 1$ à l'ordre 0. Les expressions proposées du champ magnétique rotorique se simplifient

$$\text{donc à l'ordre 0 en } \frac{e}{a} \text{ en: } \begin{cases} B_r(r, \theta) = \frac{1}{2} (1)^2 (1 + 1^2) J \cos(\theta - \alpha) = J \cos(\theta - \alpha) \\ B_\theta(r, \theta) = \frac{-1}{2} (1)^2 (1 - 1^2) J \sin(\theta - \alpha) = 0 \end{cases}$$

III.A.3. Avec Ω vitesse angulaire constante, $\alpha(t) = \alpha_{rs} + \Omega t = \Omega t$.

Le champ rotorique s'écrit alors: $B_r(r, \theta) = J \cos(\theta - \Omega t)$; $B_\theta(r, \theta) = 0$

On en déduit la composante radiale du champ dans la direction $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$B_r(r, \theta) = J \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Omega t\right) = J \sin(\Omega t)$. Le champ rotorique ressenti en $\theta = \frac{\pi}{2}$ est donc au cours du temps sinusoïdal, de période identique à celle de la rotation du rotor.

III.B Champ magnétique statorique

III.B.1. A cause de la différence de perméabilité entre les matériaux ferromagnétiques et l'air de l'entrefer, les conditions de changement de milieu entraînent que le champ magnétique est quasi normal au rotor, c'est-à-dire radial: $\vec{B}_{S1}(r, \theta, t) = B_{S1}(r, \theta, t)\vec{u}_r$ ("les lignes de champs sortent orthogonalement à l'interface dans un entrefer").

Comme de plus $e \ll a$, on considère que sa norme ne dépend pas de r : $\vec{B}_{S1}(r, \theta, t) = B_{S1}(\theta, t)\vec{u}_r$.

Le plan de la spire est un plan de symétrie pour la distribution de courant, et donc un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique.

$$\vec{B}_{S1}(M') = -\text{sym}(\vec{B}_{S1}(M)) \text{ pour } M' \text{ symétrique de } M.$$

Pour calculer le champ magnétique, on utilise le théorème d'Ampère sur le contour suggéré sur la figure ci-contre: $\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i_1$.

A cause de sa perméabilité considérée comme infinie $\vec{H}_{stator} \approx \vec{0}$, c'est-à-dire en réalité:

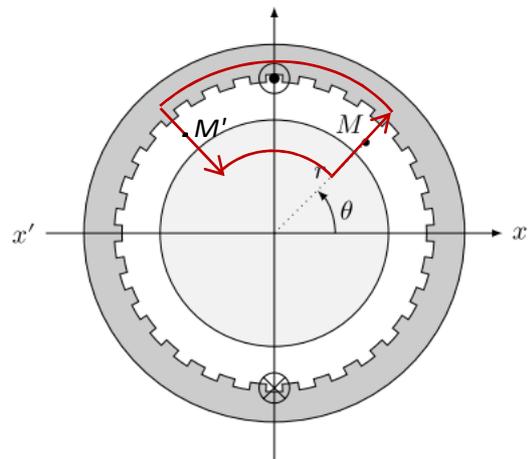
$$\|\vec{H}_{stator}\| \ll \|\vec{H}_{entrefer}\|.$$

De même $\|\vec{H}_{rotor}\| \ll \|\vec{H}_{entrefer}\|$.

Le théorème d'Ampère permet donc d'écrire en séparant l'intégrale selon les matériaux:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Gamma_{rotor}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + 2eH(M) + \int_{\Gamma_{stator}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i_1 \quad \text{d'où } H(M) = \frac{1}{2e} i_1 \text{ et } B(M) = \frac{\mu_0}{2e} i_1$$

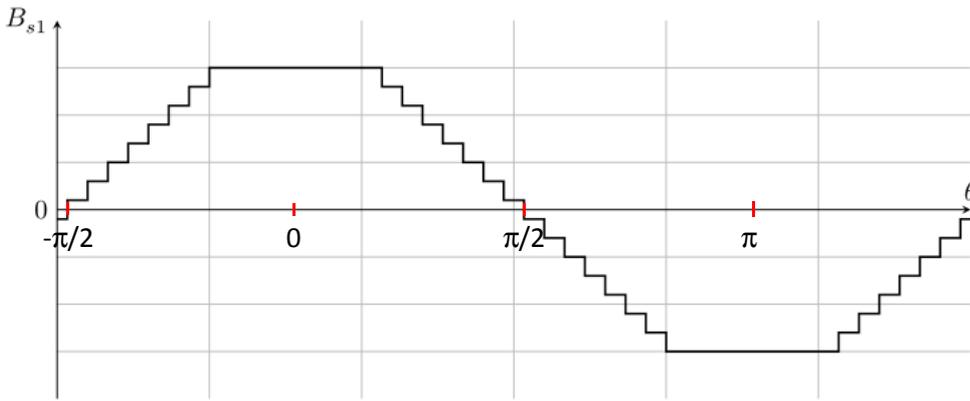
Soit $\vec{B}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0}{2e} i_1 \vec{u}_r$ pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\vec{B}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0}{2e} i_1 \vec{u}_r$ pour $\theta \in]\pi/2, 3\pi/2[$



III.B.2. Si on fait pivoter la spire autour de l'axe du rotor, la carte de champ magnétique créée par cette spire tourne également.

Si on dispose plusieurs spires obtenues par rotation à partir de la spire étudiées à la question précédente, le champ magnétique total créé sera la somme des champs créés par chaque spire, par superposition (la conservation du flux magnétique et le théorème d'Ampère sont des lois linéaires, et en première approximation, le comportement non linéaire des aimants a été négligé).

On considère des spires régulièrement réparties de façon symétrique de part et d'autre du plan $\theta = \pi/2$. Dans ce cas les angles qui correspondent à un champ nul sont respectivement $-\pi/2$ et $+\pi/2$. On repère 15 sauts semblables entre la valeur maximale et la valeur minimale du champ sur la figure 6. En considérant qu'à chaque spire est associé un saut, il y a donc en tout 15 spires, une dans le plan $\theta = \pi/2$ et 7 de chaque côté, séparées d'un angle $\theta = 2\pi/45$ d'après l'échelle horizontale.



III.B.3. La représentation précédente permet d'approximer $B_{s1}(\theta, t) \approx K_S i_1(t) \cos \theta$.

Le coefficient K_S dépend du nombre de spires, et d'après la question III.B.1, de la taille de l'entrefer (et de la perméabilité magnétique dans l'entrefer).

III.B.4. Le second enroulement est décalé de $+\pi/2$. Donc le champ créé par cet enroulement est $B_{s2}(\theta, t) \approx K_S i_2(t) \cos(\theta - \pi/2) = +K_S i_2(t) \sin \theta$.

Erreur d'énoncé sembe-t-il: quadrature retard donc déphasage de $-\pi/2$ pour $i_2(t)$ par rapport à $i_1(t)$.

En remplaçant $i_2(t) = I \cos(\omega_S t + \beta_S - \pi/2)$ qui est en quadrature retard par rapport à $i_1(t)$, on obtient bien $B_{s2}(\theta, t) = K_S I \cos(\omega_S t + \beta_S - \pi/2) \sin \theta = +K_S I \sin(\omega_S t + \beta_S) \sin \theta$.

III.B.5. Le champ résultant est donc :

$B_{s1}(\theta, t) + B_{s2}(\theta, t) = K_S I \cos(\omega_S t + \beta_S) \cos \theta + K_S I \sin(\omega_S t + \beta_S) \sin \theta = K_S I \cos(\omega_S t - \theta + \beta_S)$, dont l'expression en fonction de $\omega_S t - \theta$ est caractéristique d'une onde progressant vers les valeurs croissantes de θ à la vitesse (angulaire) ω_S .

Il s'agit donc d'un champ tournant à la vitesse (angulaire) ω_S vers les valeurs croissantes de θ , d'amplitude $K_S I$.

III.C Energie magnétique dans l'entrefer

III.C.1. La densité volumique d'énergie magnétique dans un milieu de perméabilité relative μ_r est:

$$\frac{B^2}{2\mu_r \mu_0}.$$

III.C.2. On intègre sur le volume de l'entrefer de perméabilité μ_0 (où l'essentiel de l'énergie est stockée):

$$\xi = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \int_{z=0}^{\ell} \int_{r=a}^{a+e} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{(B_r(r, \theta) + B_s(r, \theta, t))^2}{2\mu_0} dr \cdot r d\theta \cdot dz \text{ avec } r \approx a, \text{ donc}$$

$$\xi = \frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (I \cos(\theta - \Omega t) + K_S I \cos(\omega_S t - \theta + \beta_S))^2 d\theta \text{ que l'on sépare en trois contributions:}$$

$$\frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (I \cos(\theta - \Omega t))^2 d\theta = \frac{\ell e a}{2\mu_0} I^2 \pi = \frac{V}{4\mu_0} I^2$$

$$\frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (K_S I \cos(\omega_S t - \theta + \beta_S))^2 d\theta = \frac{\ell e a}{2\mu_0} (K_S I)^2 \pi = \frac{V}{4\mu_0} (K_S I)^2$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (2J \cos(\theta - \Omega t) \cdot K_S I \cos(\omega_s t - \theta + \beta_s)) d\theta \\
&= \frac{\ell e a}{2r \mu_0} J K_S I \int_{\theta=0}^{2\pi} [\cos(\theta - \Omega t + \omega_s t - \theta + \beta_s) + \cos(\theta - \Omega t - \omega_s t + \theta - \beta_s)] d\theta \\
&= \frac{\ell e a}{2\mu_0} J K_S I \int_{\theta=0}^{2\pi} [\cos(-\Omega t + \omega_s t + \beta_s) + \cos(2\theta - \Omega t - \omega_s t + \theta - \beta_s)] d\theta = \frac{V}{2\mu_0} J K_S I \cos(-\Omega t + \omega_s t + \beta_s)
\end{aligned}$$

$$\xi = \frac{V}{4\mu_0} J^2 + \frac{V}{4\mu_0} (K_S I)^2 + \frac{V}{2\mu_0} J K_S I \cos(-\Omega t + \omega_s t + \beta_s)$$

III.D Moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor

III.D.1. A l'instant t , le champ rotorique est maximal en $\theta = \alpha = \Omega t$. Le champ statorique est maximal en $\theta = \omega_s t + \beta_s$.

L'angle entre ces deux positions est

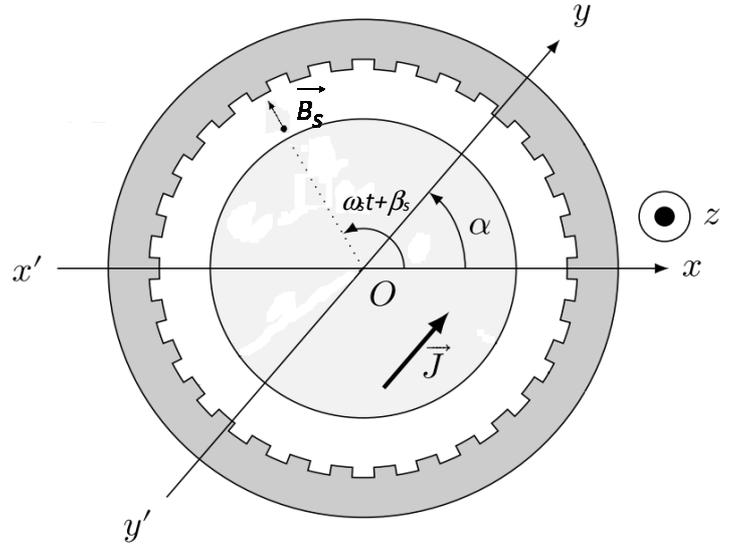
$$\beta = \omega_s t + \beta_s - \Omega t = \omega_s t + \beta_s - \alpha.$$

L'énergie électromagnétique s'écrit donc

$$\xi = \frac{V}{4\mu_0} J^2 + \frac{V}{4\mu_0} (K_S I)^2 + \frac{V}{2\mu_0} J K_S I \cos(\beta).$$

Le couple des forces électromagnétiques exercées sur le rotor est

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \frac{V}{2\mu_0} J K_S I \sin(\omega_s t + \beta_s - \alpha) \\
&= \frac{V}{2\mu_0} J K_S I \sin(\omega_s t + \beta_s - \Omega t)
\end{aligned}$$



III.D.2. Pour que le couple moyen soit non nul, il faut que le rotor et le champ statorique tournent à la même vitesse: condition de synchronisme $\Omega = \omega_s$. De plus pour que le couple soit moteur (positif), il faut que $\sin(\beta) = \sin(\beta_s) > 0$, soit $\beta = \beta_s \in]0, \pi[$: le rotor doit être en retard sur le champ statorique.

III.D.3. L'angle de calage des courants β_s est aussi l'angle entre la direction principale du champ rotorique et la position du rotor, compte tenu de la convention choisie ($t=0$ lorsque $\alpha=0$). Le couple maximal correspond à $\beta_s = \pi/2$. On retrouve la discussion sur les points de fonctionnement A et B compatibles avec un couple donné inférieur au couple maximal.

En raisonnant en régime quasi permanent, si on imagine une perturbation qui augmente β_s à partir du point de fonctionnement A, le couple moteur augmente, le rotor accélère (th du moment cinétique), et donc l'angle β_s diminue. De même si la perturbation diminue β_s , le couple diminue, le rotor décélère, et β_s augmente: le point de fonctionnement A est stable. Au contraire si on tient un raisonnement similaire à partir du point B, on trouve que c'est un point de fonctionnement instable.

