

Centrale PSI 2020

Physique - chimie 1

Stockage d'énergie par pompage thermique
(Procédé SEPT)

CPGE : Mohamed 5 - CASA

Mr. SOUKTANI Mohamed Amine (souktanim@gmail.com)

August 27, 2020

Contents

I	Analyse thermodynamique du procédé SEPT	2
I-A	Schématisation simplifiée du procédé	2
I-B	Étude de la phase de stockage	5
I-C	Positionnement du procédé SEPT par rapport aux autres modes de stockage	8
I-D	Étude de la phase de déstockage	9
II	Analyse de quelques caractéristiques	13
II-A	Influence de la porosité du milieu	13
II-B	Influence du débit massique de gaz	15
II-C	Évolution thermique des enceintes pendant les pauses	15
II-D	Notions sur les modèles de conductivité effective d'un milieu poreux	16

I Analyse thermodynamique du procédé SEPT

I-A Schématisation simplifiée du procédé

Q1 :

Le coefficient de performance d'une pompe à chaleur est défini par :

$$\text{COP} = \frac{\text{ce qu'on veut}}{\text{ce qu'on dépense}} = -\frac{Q_{\text{ch}}}{W_{\text{cycle}}} \quad (Q_{\text{ch}} < 0)$$

or d'après le premier principe : $\Delta U_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{ch}} + Q_{\text{Fr}}$

$$\text{COP} = \frac{Q_{\text{ch}}}{Q_{\text{ch}} + Q_{\text{Fr}}} = \frac{1}{1 + \frac{Q_{\text{Fr}}}{Q_{\text{ch}}}}$$

En utilisant le second principe : $\Delta S_{\text{cycle}} = \frac{Q_{\text{ch}}}{T_{\text{ch}}} + \frac{Q_{\text{Fr}}}{T_{\text{Fr}}} + S^{\text{créé}} = 0$
on obtient :

$$\text{COP} = \frac{1}{1 - \frac{T_{\text{Fr}}}{T_{\text{ch}}} - \frac{T_{\text{Fr}}}{Q_{\text{ch}}} S^{\text{créé}}}$$

! Lorsque le cycle est réversible (cycle de CARNOT), $S^{\text{créé}} = 0$

$$\text{COP}_{\text{CARNOT}} = \text{COP}_{\text{max}} = \frac{1}{1 - \frac{T_{\text{Fr}}}{T_{\text{ch}}}}$$

En respectant les notations de l'énoncé ;

$$\text{COP}_{\text{max}} = \frac{1}{1 - \frac{T_{\text{B}}}{T_{\text{H}}}}$$

Q2 :

L'efficacité d'une machine motrice est donnée par :

$$\eta = \frac{\text{ce qu'on veut}}{\text{ce qu'on dépense}} = -\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{\text{ch}}} \quad (Q_{\text{ch}} > 0)$$

- Premier principe : $\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{ch}} + Q_{\text{Fr}}$
- Deuxième principe : $\Delta S_{\text{cycle}} = 0 = \frac{Q_{\text{ch}}}{T_{\text{ch}}} + \frac{Q_{\text{Fr}}}{T_{\text{Fr}}} + S^{\text{créé}}$

$$\eta = \frac{Q_{\text{ch}} + Q_{\text{Fr}}}{Q_{\text{ch}}} = 1 + \frac{Q_{\text{Fr}}}{Q_{\text{ch}}}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_{Fr}}{T_{ch}} - \frac{T_{Fr}}{Q_{ch}} S^{crée}$$

! Lorsque le cycle est réversible (cycle de CARNOT), $S^{crée} = 0$

$$\eta_{CARNOT} = \eta_{max} = 1 - \frac{T_{Fr}}{T_{ch}}$$

$$\eta_{CARNOT} = 1 - \frac{T_B}{T_H}$$

Q3 :

Dans les conditions de réversibilité (validité du théorème de CARNOT), si les températures des deux sources restent constantes pendant les deux phases :

$$(COP)_{CARNOT} \times \eta_{CARNOT} = 1$$

Cela justifie que l'énergie stockée est totalement récupérée pendant la phase de déstockage (pas d'énergie rejetée)

■ Pendant la phase de stockage ① :

$$\underbrace{E_{restituée \text{ ①}}}_{\substack{\text{Énergie consommée} \\ \text{en stockage}}} = \underbrace{E_{turbo \text{ ①}}}_{\substack{\text{Énergie apportée} \\ \text{par les turbomachines} \\ \text{(turbine + compresseur)}}} + \underbrace{E_{c1}}_{\substack{\text{Énergie apportée} \\ \text{par chauffage}}}$$

■ Pendant la phase de déstockage ② :

$$\underbrace{E_{restituée \text{ ②}}}_{\substack{\text{Énergie recouvrée} \\ \text{en déstockage}}} = \underbrace{E_{turbo \text{ ②}}}_{\substack{\text{Énergie cédée} \\ \text{par les turbomachines}}} + \underbrace{E_{c2}}_{\substack{\text{Énergie apportée} \\ \text{par chauffage}}}$$

« Production de l'énergie mécanique à partir de l'énergie thermique. »

- $E_{T1} = E_{restituée \text{ ①}} + E_{r1}$ avec E_{r1} : énergie cédée par refroidissement.
- $E_{T2} = E_{restituée \text{ ②}} + E_{r2}$ avec E_{r2} : énergie cédée par refroidissement.

- Le rendement du procédé :

$$\Gamma = -\frac{E_{\text{restituée } \textcircled{2}}}{E_{\text{restituée } \textcircled{1}}} = \frac{E_{T_1} + E_{r_2}}{E_{\text{restituée } \textcircled{1}}} = \frac{E_{\text{restituée } \textcircled{1}} + E_{r_1} + E_{r_2}}{E_{\text{restituée } \textcircled{1}}}$$

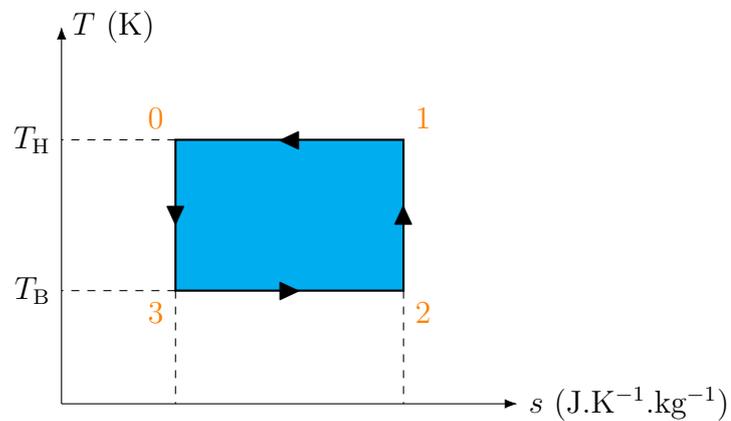
S'il n'y a pas de perte : $E_{r_1} = E_{r_2} = 0$

$$\Gamma = 1$$

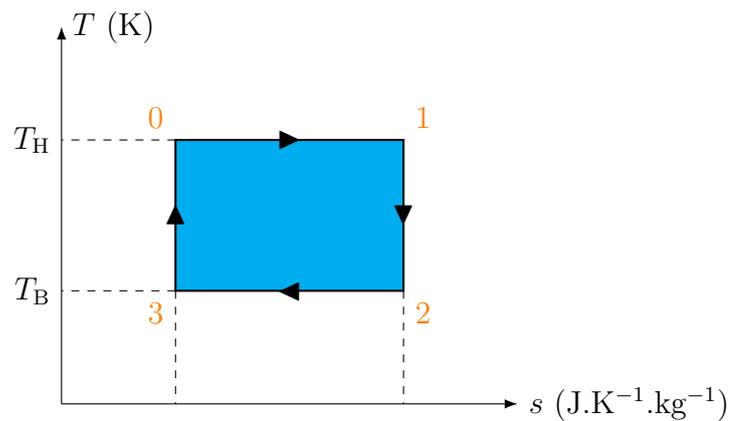
Q4 :

Le cycle de CARNOT (réversible) est constitué par deux isothermes séparées par deux isentropiques ($s = \text{cte}$)

- Pour le stockage :



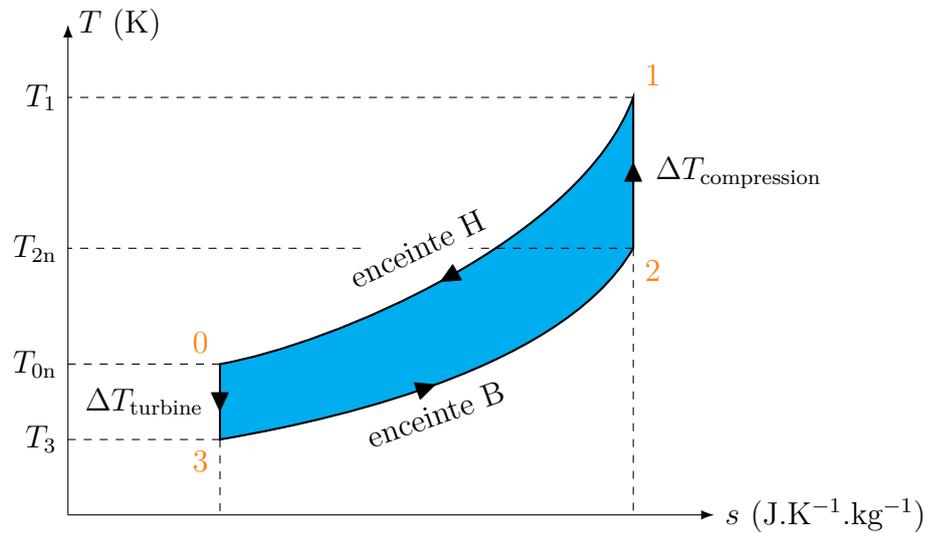
- Pour le déstockage :



I-B Étude de la phase de stockage

Q5 :

■ Pour le stockage :



Q6 :

Au niveau du compresseur (2 → 1), la transformation est adiabatique, ce qui donne :

$$\begin{aligned} ds &= \delta s^{\text{créé}} \\ \Rightarrow s_1 - s_2 &= s^{\text{créé}} > 0 \\ \Rightarrow s_1 &> s_2 \end{aligned}$$

ce qui justifie que $T_1 > T_{1is}$

Q7 :

L'application du premier principe pour les systèmes ouverts nous donne :

$$\Delta h = \omega + q_e, \quad \Delta E_c = \Delta E_p = 0$$

or le passage du fluide caloporteur dans le compresseur et la turbine se fait de manière adiabatique ($q = 0$)

$$\omega = h_s - h_e$$

Soient :

$$\begin{cases} \omega_{\text{cis}} &= h_{\text{scis}} - h_{\text{ec}} \\ \omega_{\text{c}} &= h_{\text{sc}} - h_{\text{ec}} \\ \omega_{\text{t}} &= h_{\text{st}} - h_{\text{et}} \\ \omega_{\text{tis}} &= h_{\text{stis}} - h_{\text{et}} \end{cases}$$

Donc :

$$\eta_{cs} = \frac{\omega_{cis}}{\omega_c} = \frac{h_{scis} - h_{ec}}{h_{sc} - h_{ec}}$$

$$\eta_{ts} = \frac{\omega_b}{\omega_{tis}} = \frac{h_{st} - h_{et}}{h_{stis} - h_{et}}$$

Q8 :

■ 2 → 1 : Compression adiabatique + irréversible

$$\begin{aligned} \eta_{cs} &= \frac{c_p (T_{1is} - T_{2n})}{c_p (T_1 - T_{2n})} \\ \Rightarrow T_1 &= T_{2n} + \frac{1}{\eta_{cs}} (T_{1is} - T_{2n}) \end{aligned} \quad (1)$$

■ 0 → 3 : détente adiabatique + irréversible

$$\begin{aligned} \eta_{ts} &= \frac{c_p (T_3 - T_{0n})}{c_p (T_{3is} - T_{0n})} \\ \Rightarrow T_3 &= T_{0n} + \eta_{ts} (T_{3is} - T_{0n}) \end{aligned} \quad (2)$$

De plus :

■ 2 → 1is : adiabatique + réversible + G.P.

$$\begin{aligned} PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} &= \text{cte} \\ P_B T_{2n}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} &= P_H T_{1is}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\ \psi &= \left(\frac{P_H}{P_B} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\left(\frac{T_{2n}}{T_{1is}} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_{1is}}{T_{2n}} \end{aligned}$$

$$T_{1is} = T_{2n} \psi$$

■ 0 → 3is : adiabatique + réversible + G.P.

$$\begin{aligned} PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} &= \text{cte} \\ P_H T_{0n}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} &= P_B T_{3is}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\ \psi &= \left(\frac{P_H}{P_B} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\left(\frac{T_{3is}}{T_{0n}} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_{0n}}{T_{3is}} \end{aligned}$$

$$T_{3is} = \frac{T_{0n}}{\psi}$$

! On constate que ψ est un rapport thermique de compression isentropique.

On remplace T_{1is} et T_{3is} par leurs expressions dans les équations (1) et (2), on obtient :

$$T_1 = T_{2n} + \frac{1}{\eta_{cs}} (\psi - 1) T_{2n}$$
$$T_3 = T_{0n} + \eta_{ts} \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right) T_{0n}$$

résultat :

$$T_1 = T_{2n} \left(1 + \frac{\psi - 1}{\eta_{cs}} \right)$$

$$T_3 = T_{0n} \left(1 + \eta_{ts} \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right) \right)$$

Q9 :

L'énergie massique mise en jeu lors du stockage est donnée par :

$$e_s = \Delta h_{\text{compression}} + \Delta h_{\text{détente}}$$
$$e_s = c_p (\Delta T_{\text{compresseur}} + \Delta T_{\text{turbine}})$$

$$e_s = c_p ((T_1 - T_{2n}) + (T_3 - T_{0n}))$$

Q10 :

$$e_s = c_p \left(T_{2n} \frac{\psi - 1}{\eta_{cs}} + T_{0n} \eta_{ts} \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right) \right)$$

Q11 :

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}, \quad \frac{c_p}{c_v} = \gamma \quad \Rightarrow \quad c_p - \frac{c_p}{\gamma} = \frac{R}{M}$$

$$c_p = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)}$$

A.N.

$$c_p = 518 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} \quad \Rightarrow \quad e_s = 177,73 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

I-C Positionnement du procédé SEPT par rapport aux autres modes de stockage

Q12 :

Comparaison des différentes technologies de stockage en termes de puissance et de capacité :

- L'hydraulique gravitaire et l'air comprimé (CAES) sont les procédés les mieux adaptés, ils ont une grande puissance et une grande capacité.
- Les batteries offrent des performances très intéressantes.
- Le stockage par hydrogène n'affiche pas actuellement des rendements attractifs.
- La technologie SMES a une bonne puissance mais elle souffre de sa faible capacité.
- Le procédé SEPT est performant en terme de puissance et de capacité (capacité $\simeq 500$ MWh; puissance $\simeq 100$ MW).



la composante coût, le temps de décharge et l'impact sur l'environnement sont également des points à discuter.

Q13 :

$$\dot{m} = \frac{P}{c_p T}$$

Q14 :

$$\varepsilon = \frac{V_{\text{fluide}}}{V_{\text{enceinte}}} = \frac{m_{\text{Ar}}}{\rho_{\text{Ar}} V_e}$$

$$m_{\text{Ar}} = \varepsilon \rho_{\text{Ar}} V_e = 14400 \text{ kg d'Argon}$$

Q15 :

L'énergie que peut stocker une batterie automobile est :

$$E = qV = 503600 \times 12$$

$$E = 2,16 \text{ MJ}$$

$$e_{\text{batt}} = 216 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

I-D Étude de la phase de déstockage

Q16 :

Comme mentionné dans l'énoncé, la compression de $T_{2n} \rightarrow T_1$ lors du stockage devient une détente de $T_1 \rightarrow T_{2d}$. En se basant sur la démarche effectuée dans la question [Q8] ; on écrit :

$$T_{0d} = T_3 \left(1 + \frac{\psi - 1}{\eta_{cd}} \right)$$
$$T_{2d} = T_1 \left(1 + \eta_{td} \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right) \right)$$

et d'après la question [Q8] on avait :

$$T_1 = T_{2n} \left(1 + \frac{\psi - 1}{\eta_{cs}} \right)$$
$$T_3 = T_{0n} \left(1 + \eta_{ts} \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right) \right)$$

On obtient :

$$T_{0d} = T_{0n} \left(1 + \eta_{ts} \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right) \right) \left(1 + \frac{\psi - 1}{\eta_{cd}} \right)$$

$$T_{2d} = T_{2n} \left(1 + \frac{\psi - 1}{\eta_{cs}} \right) \left(1 + \eta_{td} \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right) \right)$$

Q17 :

Du fait de l'irréversibilité lors de la transformation $3 \rightarrow 0d$ et $1 \rightarrow 2d$, on a :

$$T_{0d} > T_{0n} \quad \text{et} \quad T_{2d} > T_{2n}$$

Il est nécessaire d'évacuer cette chaleur générée par l'irréversibilité des turbomachines.

Q18 :

Pour que $T_{0d} = T_{0n}$ et $T_{2d} = T_{2n}$, il faut que

$$\eta_{ts} = \eta_{cd} = 1 \quad \text{et} \quad \eta_{cs} = \eta_{td} = 1$$

chose qui n'est pas réalisable dans l'industrie !!!

Q19 :

Pour éviter l'augmentation de la température à la sortie des enceintes, il faut insérer des échangeurs dans le cycle chargés de refroidir le gaz, en le ramenant à sa température nominale.

Q20 :

$\eta_{cs} = \eta_{td} = 1$ est une condition irréalisable dans la pratique, il faut nécessairement choisir un rapport de pression isentropique en stockage ψ différent de celui en déstockage ψ_d pour que la condition suivante soit satisfaite :

$$T_{2d} = T_{2n}$$

tel que :

$$T_{2d} = T_{2n} \left(1 + \frac{\psi - 1}{\eta_{cs}} \right) \left(1 + \eta_{td} \left(\frac{1}{\psi_d} - 1 \right) \right)$$

Q21 :

$T_{2d} = T_{2n}$ implique que :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\psi - 1}{\eta_{cs}} \right) \left(1 + \eta_{td} \left(\frac{1}{\psi_d} - 1 \right) \right) &= 1 \\ 1 + \eta_{td} \left(\frac{1}{\psi_d} - 1 \right) &= \frac{\eta_{cs}}{\eta_{cs} + \psi - 1} \\ \eta_{td} \left(\frac{1}{\psi_d} - 1 \right) &= \frac{\eta_{cs}}{\eta_{cs} + \psi - 1} - 1 = \frac{1 - \psi}{\eta_{cs} + \psi - 1} \\ \frac{1}{\psi_d} - 1 &= \frac{1}{\eta_{td}} \left(\frac{1 - \psi}{\eta_{cs} + \psi - 1} \right) \\ \frac{1}{\psi_d} &= \frac{1 - \psi}{\eta_{td} (\eta_{cs} + \psi - 1)} + 1 = \frac{1 - \psi + \eta_{td} (\eta_{cs} + \psi - 1)}{\eta_{td} (\eta_{cs} + \psi - 1)} \end{aligned}$$

$$\psi_d = \frac{\eta_{td} (\eta_{cs} + \psi - 1)}{1 - \psi + \eta_{td} (\eta_{cs} + \psi - 1)}$$

! Si $\eta_{td} = \eta_{cs} = 1 \Rightarrow \psi_d = \psi$.

Q22 :

η_{td} et η_{cs} sont inférieurs à 1

$$\psi_d > \psi$$

Q23 :

L'énergie massique mise en jeu lors du déstockage :

$$\begin{aligned}
 e_d &= c_p (\Delta T_{\text{compresseur}} + \Delta T_{\text{turbine}}) \\
 e_d &= c_p (T_{0d} - T_3 + T_{2d} - T_1) \\
 e_d &= c_p \left[T_3 \left(1 + \frac{\psi_d - 1}{\eta_{cd}} \right) - T_3 + T_1 \left(1 + \eta_{td} \left(\frac{1}{\psi_d} - 1 \right) \right) - T_1 \right] \\
 e_d &= c_p \left[T_3 \left(\frac{\psi_d - 1}{\eta_{cd}} \right) + T_1 \eta_{td} \left(\frac{1}{\psi_d} - 1 \right) \right] \\
 e_d &= c_p \left[T_{0n} \left(1 + \eta_{ts} \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right) \right) \frac{\psi - 1}{\eta_{cd} (1 - \psi + \eta_{td} (\eta_{cs} + \psi - 1))} \right. \\
 &\quad \left. + T_{2n} \eta_{td} \left(1 + \frac{\psi - 1}{\eta_{cs}} \right) \frac{1}{\eta_{td}} \left(\frac{1 - \psi}{\eta_{cs} + \psi - 1} \right) \right] \\
 e_d &= c_p \left[T_{0n} \left(1 + \eta_{ts} \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right) \right) \frac{\psi - 1}{\eta_{cd} (1 - \psi + \eta_{td} (\eta_{cs} + \psi - 1))} + T_{2n} \left(\frac{1 - \psi}{\eta_{cs}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Q24 :

- $\eta = 98\%$; le rendement théorique $\Gamma = 90\%$ correspond à une température $T_1 = 300^\circ\text{C}$.
- $\eta = 96\%$; le rendement théorique $\Gamma = 90\%$ correspond à une température $T_1 = 600^\circ\text{C}$.
- $\eta = 94\%$; le rendement théorique $\Gamma = 90\%$ correspond à une température $T_1 = 1000^\circ\text{C}$.
- Pour $\eta \leq 92\%$; dans le domaine de températures considérées, le rendement théorique n'atteint pas 90%.

Q25 :

Un même rendement théorique Γ peut être obtenu à plusieurs rendements isentropiques et à températures différentes ; à titre d'exemple :

Γ	η	T
70%	98%	110°C
	96%	210°C
	94%	320°C
	92%	450°C
	90%	600°C
	84%	1050°C

Le choix des turbomachines fait apparaître un compromis entre rendements isentropiques η et résistance aux températures élevées.

Q26 :

- Le refroidissement nécessaire pour compenser l'élargissement des fronts thermiques.
- Les fuites thermiques dans les enceintes.
- La masse du gaz est supposée la même dans les deux processus, le stockage et déstockage, ce n'est le cas dans la réalité.

II Analyse de quelques caractéristiques

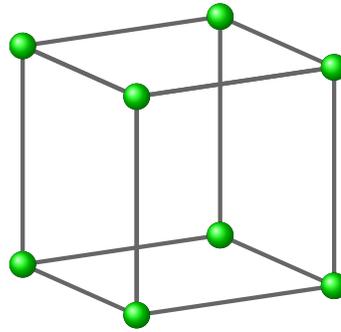
II-A Influence de la porosité du milieu

Q27 :

$$\varepsilon = \frac{V_{\text{fluide}}}{V_{\text{totale}}} = \frac{V_{\text{totale}} - V_{\text{solide}}}{V_{\text{totale}}}$$

■ Pour la structure cubique

$$\varepsilon = 1 - \frac{N \frac{4}{3} \pi r^3}{a^3}$$



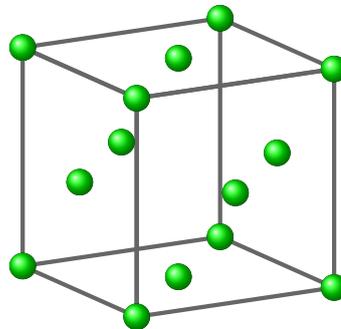
avec $a = 2r$ et $N = 8 \times \frac{1}{8} = 1$ atome / maille

$$\varepsilon = 1 - \frac{\frac{4}{3} \pi \frac{a^3}{8}}{a^3} = 1 - \frac{\pi}{6}$$

A.N.

$$\varepsilon = 47\% \Rightarrow C = 52,4\%$$

■ Pour la structure cubique à faces centrées



$$\bullet N = (8 \times \frac{1}{8}) + (6 \times \frac{1}{2}) = 4$$

- Condition de tangence : $4r = a\sqrt{2}$

$$\varepsilon = 1 - \frac{N \frac{4}{3} \pi r^3}{a^3}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{4 \times \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{4} \right)^3}{a^3}$$

A.N.

$$\varepsilon = 25,9\% \quad \Rightarrow \quad C = 74,1\%$$

- $\varepsilon_{\text{CFC}} < \varepsilon_{\text{C}} \quad \Rightarrow \quad C_{\text{cubique}} < C_{\text{C.F.C.}}$

La structure C.F.C. est la plus compacte.

Q28 :

L'efficacité de stockage augmente avec la porosité, la structure la plus adaptée au remplissage du régénérateur est la structure la moins compacte, il s'agit de la structure cubique.

Q29 :

Plus le coefficient conducto-convectif h est élevé, plus la différence de température entre le fluide et le solide est petite et plus le gradient $\frac{dT}{dz}$ est important.

Q30 :

Pour $h = 20 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$, la température de sortie est obtenue à $t = 13,3 \text{ h}$. Cette même température est obtenue à $t = 10 \text{ h}$ pour $h = 5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

Cela permet de conclure que lorsque le coefficient d'échange h est élevé, le stockage est arrêté plus tard (c'est à dire, on peut stocker plus d'énergie sans rejeter plus de chaleur dans l'environnement).

Q31 :

- Pour qu'un échange thermique soit réversible, il faut qu'il s'effectue entre deux fluides à la même température (isotherme).
- $T_f - T_s \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad h \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad S^{\text{créée}} = 0$: Pas de diffusion.

Q32 :

Lorsque la largeur des enceintes augmente, la section de passage du gaz augmente, ce qui implique une diminution de la vitesse moyenne du gaz et la différence de température entre le gaz et la paroi ;

- $\Delta T \simeq 0$: irréversibilité négligeable.
- $\Delta T \simeq 0$: diffusion négligée.
- Gradient thermique important.
- Augmentation du rendement.

II-B Influence du débit massique de gaz

Q33 :

- La section de passage du gaz est constante.
- Lorsque le débit massique D_m augmente, la vitesse du gaz augmente, ce qui implique une augmentation de la différence de température entre fluide et paroi.
- L'irréversibilité et la diffusion augmentent.
- Le gradient thermique est réduit.
- Le rendement se trouve diminué.

II-C Évolution thermique des enceintes pendant les pauses

Q34 :

- La densité de flux de chaleur est donnée par la loi de FOURIER telle que :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dz} \vec{e}_z \quad (\text{W/m}^2)$$

- Le flux thermique diffusé est :

$$\phi = \iint \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} = \lambda \frac{dT}{dz} S_{\text{solide}} \quad (\text{W})$$

avec $S_{\text{solide}} = (1 - \varepsilon)L_e^2$

- L'énergie thermique diffusé est donc

$$E_{\text{diff}} = \phi \Delta t = \lambda \frac{dT}{dz} (1 - \varepsilon) L_e^2 \Delta t$$

A.N.

$$E_{\text{diff}} = 29.10^6 \text{ J}$$

$\frac{E_{\text{diff}}}{U} = 1,7.10^{-5} \ll 1$: Dans ces conditions on peut négliger la diffusion thermique axiale pendant la période d'arrêt.

II-D Notions sur les modèles de conductivité effective d'un milieu poreux

Q35 :

- Modèle série :

$$\frac{1}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{\varepsilon}{\lambda_g} + \frac{1 - \varepsilon}{\lambda_s}$$

- Modèle parallèle :

$$\lambda_{\text{eff}} = \varepsilon\lambda_g + (1 - \varepsilon)\lambda_s$$

→ Si $\varepsilon = 0$ (phase solide) :

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_s$$

→ Si $\varepsilon = 1$ (phase gazeuse) :

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_g$$

Q36 :

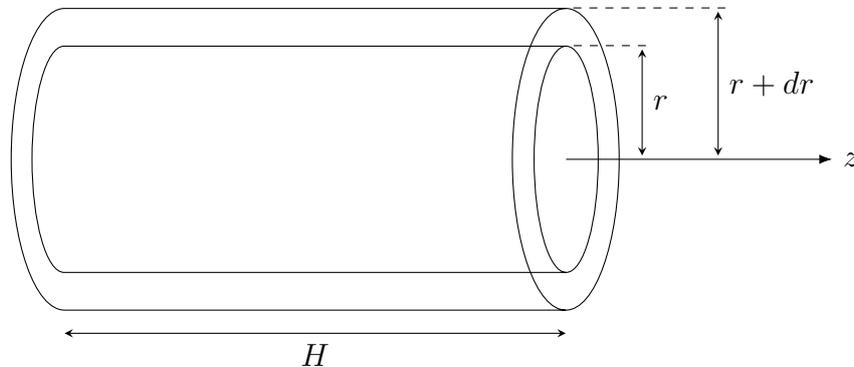
- $\lambda_{\text{min}} = \frac{\lambda_g\lambda_s}{\varepsilon(\lambda_s - \lambda_g)} + \lambda_g$: le flux est perpendiculaire aux strates.
- $\lambda_{\text{max}} = \varepsilon\lambda_g + (1 - \varepsilon)\lambda_s$: le flux est parallèle aux strates.

Q37 :

- $\lambda_{\text{min}} = 0,036 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- $\lambda_{\text{max}} = 0,22 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Q38 :

La symétrie cylindrique impose que : $T(M, t) = T(r, t)$



On considère comme système Σ , la portion du matériau comprise entre les cylindres d'axes (Oz), de rayons respectifs r et $r + dr$ et de même hauteur H .

- Le volume de cette portion est : $2\pi H r dr$.
- La masse est : $\delta m = 2\pi \rho H r dr$.
- La variation d'énergie interne du système Σ entre t et $t + dt$ est alors :

$$\begin{aligned} d^2U &= \delta m c_p [T(r, t + dt) - T(r, t)] \\ &= 2\pi \rho c_p H r dr [T(r, t + dt) - T(r, t)] \end{aligned}$$

$$d^2U = 2\pi \rho c_p H \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} r dr \quad (3)$$

- Entre t et $t + dt$, le système Σ ne reçoit pas de travail car le matériau solide est incompressible

$$\delta^2\omega = 0 \quad (4)$$

- Le flux thermique reçu par Σ :

$$\begin{aligned} \phi(r, t) &= \iint \vec{j}_{\text{th}}(r, t) \cdot d\vec{S} = \iint j_{\text{th}}(r, t) \vec{u}_r \cdot r d\theta dz \vec{u}_r \\ \phi(r, t) &= j_{\text{th}}(r, t) r 2\pi H \end{aligned}$$

- Le transfert thermique à travers le cylindre de rayon r :

$$\delta Q_1 = \phi(r, t) dt$$

- Le transfert thermique à travers le cylindre de rayon $r + dr$:

$$\delta Q_2 = -\phi(r + dr, t) dt$$

Le signe $(-)$ se justifie par le fait que le flux $\phi(r + dr, t)$ traverse le cylindre de rayon $r + dr$ vers l'extérieur.

$$\delta^2Q = \delta Q_1 + \delta Q_2 = -\frac{\partial \phi(r, t)}{\partial r} dr dt$$

$$\delta^2Q = -2\pi H \frac{\partial (r j_{\text{th}}(r, t))}{\partial r} dr dt \quad (5)$$

- Le premier principe de la thermodynamique s'écrit pour Σ , entre t et $t + dt$:

$$d^2U = \delta^2\omega + \delta^2Q$$

$$2\pi\rho c_p H \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt r dr = -2\pi H \frac{\partial (r j_{th}(r, t))}{\partial r} dr dt$$

$$\rho c_p \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{th}(r, t))}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

C'est l'équation locale du bilan thermique.

- La loi de FOURIER :

$$\vec{j}_{th}(r, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

$$j_{th}(r, t) = -\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \quad (7)$$

On injecte l'équation (7) dans l'équation (6), on obtient comme résultat :

$$\rho c_p \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \left(-r \lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right)}{\partial r} = 0$$

$$\rho \frac{c_p}{\lambda} \frac{\partial (r T(r, t))}{\partial t} = \frac{\partial \left(r \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right)}{\partial r}$$

Soit :

$$\frac{\partial (r T(r, t))}{\partial t} = a \frac{\partial \left(r \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right)}{\partial r} \quad (8)$$

Q39 :

Le coefficient de diffusion a s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$a = \frac{L^2}{\tau} \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{a\tau}$$

L : Longueur caractéristique de la variation de la température.

τ : Temps de diffusion.

Q40 :

$$\phi = \iint \vec{j}_{th}(r, t) \cdot d\vec{S} = j_{th}(r, t) 2\pi r H$$

$$\varphi_L = \frac{\phi}{H} = 2\pi r j_{th}(r, t) = -2\pi r \lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} = -\frac{\varphi_L}{2\pi r \lambda}$$

Pour $r = r_0$:

$$\frac{\partial T(r_0, t)}{\partial r} = -\frac{\varphi_L}{2\pi r_0 \lambda}$$

Q41 :

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\varphi_L}{4\pi\lambda} \left(-\gamma - \ln \left(\frac{r^2}{4\alpha t} \right) \right)$$

$$T(r_0, t) = T_0 - \frac{\varphi_L}{4\pi\lambda} \left(\gamma + \ln \left(\frac{r_0^2}{4\alpha t} \right) \right)$$

Q42 :

$$\Delta T = T(r_0, t) - T_0 = \frac{\varphi_L}{4\pi\lambda} [(\gamma - 2 \ln r_0 + \ln 4\alpha) + \ln t]$$

D'après la figure (16), la variation de température ΔT est une fonction linéaire de $\ln t$ pour l'intervalle de temps $t > t_1$ ($t_1 \simeq e^{2,5}$: durée du régime transitoire) chose qui est en accord avec le résultat théorique précédent.

Q43 :

Dans la zone linéaire de la courbe $\Delta T = f(\ln t)$, la pente est égale à :

$$\begin{aligned} \text{pente} &= \frac{\varphi_L}{4\pi\lambda_{\text{eff}}} \simeq \frac{21 - 11}{4,5 - 3} \simeq 6,66 \text{ K} \\ \Rightarrow \lambda_{\text{eff}} &= \frac{\varphi_L}{4\pi \times \text{pente}} = \frac{\varphi}{4\pi l \times \text{pente}} \end{aligned}$$

A.N.

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{0,64}{4\pi \times 0,2 \times 6,66}$$

$$\lambda_{\text{eff}} = 3,82 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Q44 :

La valeur ainsi obtenue expérimentalement est très proche de celle calculée en (II-D) ; mode série.

- $\lambda_{\min} < \lambda_{\text{eff}} < \lambda_{\max}$
- $\lambda_{\text{eff}} \simeq \lambda_{\min}$

Le modèle théorique le plus adaptée est le modèle série où le vecteur densité de flux de chaleur est perpendiculaire au strates.