

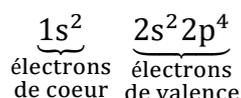
Corrigé CCS PSI 2022 Physique-chimie 1

Corrigé proposé par Nicolas Choimet, PSI*, Eiffel Bordeaux

nicolas.choimet@live.fr

1. Etude de deux composants de l'atmosphère : le dioxygène et l'ozone.

Q1 La configuration électronique de l'atome d'oxygène dans son état fondamental s'écrit :



L'atome d'oxygène possède donc 2 électrons de cœur et 6 électrons de valence.

Q2 Il appartient à la deuxième période (et à la 16^e colonne).

Q3 Les isotopes d'un élément chimique donné possèdent le même nombre de protons (et d'électrons, bien sûr) mais diffèrent par leur nombre de neutrons.

Le noyau des isotopes de l'oxygène contient :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{16}\text{O} : 8 \text{ protons et } 8 \text{ neutrons} \\ {}^{17}\text{O} : 8 \text{ protons et } 9 \text{ neutrons} \\ {}^{18}\text{O} : 8 \text{ protons et } 10 \text{ neutrons} \end{array} \right.$$

Ce sont les électrons de valence, seuls, qui déterminent les propriétés chimiques d'un atome. Ces trois isotopes ont 6 électrons de valence : ils ont donc les mêmes propriétés chimiques.

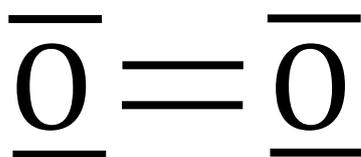
Q4 On note \bar{M} la masse molaire moyenne de l'oxygène et M_{16} , M_{17} et M_{18} les masses molaires respectives des isotopes ${}^{16}\text{O}$, ${}^{17}\text{O}$ et ${}^{18}\text{O}$. On peut écrire, en introduisant les fractions massiques x_{16} , x_{17} et x_{18} :

$$\begin{cases} \bar{M} = x_{16}M_{16} + x_{17}M_{17} + x_{18}M_{18} \\ x_{16} + x_{17} + x_{18} = 1 \end{cases}$$

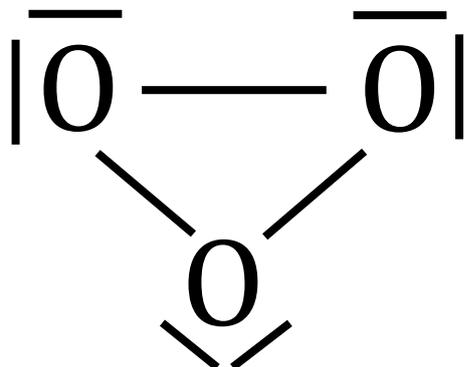
Comme on connaît $x_{17} = 0,037 \%$, on en déduit :

$$\begin{cases} x_{16} = \frac{M_{18} + x_{17}(M_{18} - M_{17}) - \bar{M}}{M_{18} - M_{16}} = 99,794 \% \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} = 0,169 \% \end{cases}$$

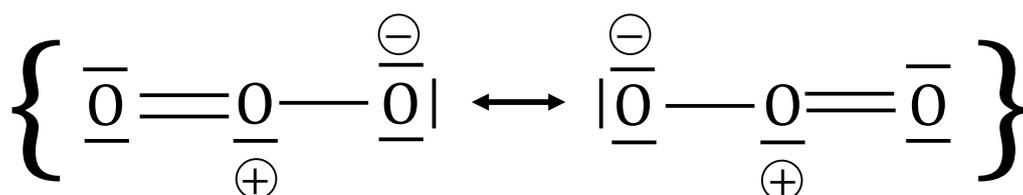
Q5



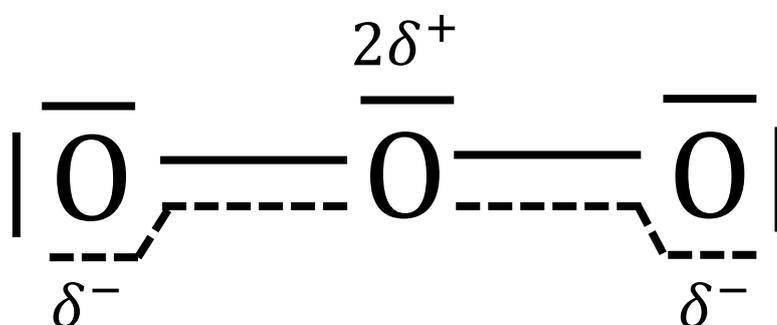
- Q6** Si la molécule d'ozone était cyclique, elle présenterait un centre de symétrie et ne serait donc pas polaire. De plus, aucun excès et aucun défaut de charge n'apparaît, ce qui confirmerait son caractère apolaire.



- Q7** Les deux formes mésomères de la molécule d'ozone sont les suivantes :

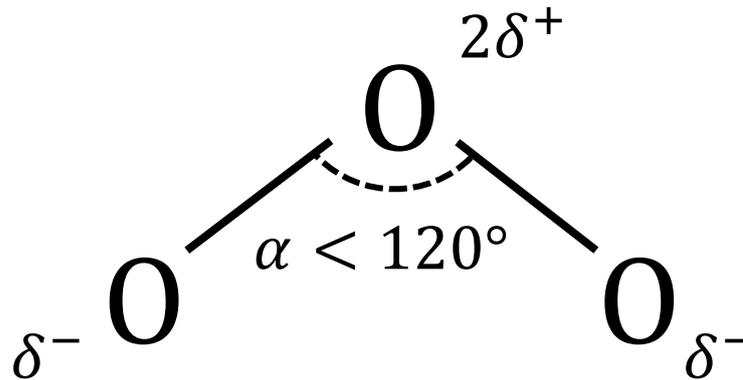


Un meilleur schéma est le suivant (la délocalisation électronique provient de la résonance entre les deux formes mésomères) :



La molécule est donc du type AX_2E_1 (deux liaisons assimilées à des liaisons simples et un doublet non-liant sur l'atome central). La méthode VSEPR donne donc une

molécule coudée (mais avec un angle entre les deux liaisons inférieur à 120° , en raison du caractère répulsif du doublet non-liant) :



Q8 Par définition de l'énergie de liaison et compte tenu de la présence des coefficients stœchiométriques $\frac{1}{2}$,

$$\Delta_r H_1^\circ = \frac{\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{A} - \text{A}) + \Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{B} - \text{B})}{2}$$

Le cycle permet d'écrire la combinaison linéaire :

$$\Delta_r H_2^\circ = \Delta_r H_1^\circ - \Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{A} - \text{B})$$

On en déduit :

$$\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{A} - \text{B}) = \frac{\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{A} - \text{A}) + \Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{B} - \text{B})}{2} - \Delta_r H_2^\circ$$

Q9 On envisage l'état intermédiaire $2\text{H}_{(\text{g})} + \text{O}_{(\text{g})}$. Un raisonnement analogue au précédent donne :

$$\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}) = \Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{H} - \text{H}) + \frac{\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{O})}{2} - 2\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{H})$$

On en déduit :

$$\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{O}) = 2\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}) + 4\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{H}) - 2\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{H} - \text{H})$$

Numériquement, on trouve :

$$\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{O}) = 496 \text{ kJ. mol}^{-1}$$

Q10 La relation de Planck-Einstein liant l'énergie ϵ d'un photon à sa fréquence ν s'écrit :

$$\epsilon = h\nu$$

où h est la constante de Planck.

Q11 Le photon doit avoir exactement l'énergie nécessaire pour briser la liaison $\text{O} - \text{O}$. Par conséquent :

$$\epsilon = \frac{\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{O})}{\mathcal{N}_A}$$

Or, la longueur d'onde du photon est donnée par $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{\epsilon}$. On en déduit :

$$\lambda = \frac{N_A hc}{\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{O})} = 0,241 \mu\text{m}$$

Il s'agit d'un rayonnement infrarouge.

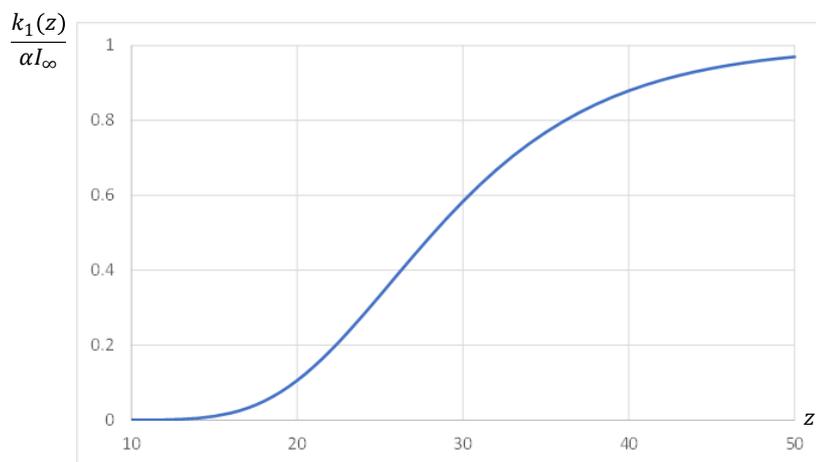
Q12 Les rayonnements sont d'autant plus dangereux qu'ils sont plus énergétiques. Par conséquent, plus la longueur d'onde est petite, plus les rayonnements sont dangereux.

Les rayonnements infrarouges ne sont pas particulièrement dangereux, étant moins énergétiques que les rayonnements visibles. Or, ils ont tendance à être absorbés dans la haute atmosphère pour briser des liaisons O – O, tandis que les ultraviolets, bien plus énergétiques, traversent la haute atmosphère sans être absorbés.

Q13 La constante de vitesse $k_1(z)$ est proportionnelle à l'intensité $I(z)$ du rayonnement UV qui croît avec l'altitude : $k_1(z) = \alpha I(z)$. C'est donc une fonction croissante de z .

- La puissance absorbée par une tranche $[z, z + dz]$ de stratosphère est proportionnelle à $I(z)$ et à la concentration $n_{\text{O}_2}(z)$.
- Au voisinage de $z = 50 \text{ km}$, $n_{\text{O}_2} \approx 0$. Donc la puissance absorbée par la tranche $[z, z + dz]$ est quasi-nulle. On en déduit que pour $z \lesssim 50 \text{ km}$, $I(z)$ décroît très lentement quand z décroît. Il en est donc de même de $k_1(z)$.
- Au voisinage de $z = 0$, $I \approx 0$ car il y a beaucoup de dioxygène. On en déduit que pour $z \gtrsim 0$, $I(z)$ décroît aussi très lentement quand z décroît. Il en est donc de même de $k_1(z)$.
- « Entre les deux », $I(z)$ et $n_{\text{O}_2}(z)$ ont des valeurs significatives. Par conséquent, on s'attend à une décroissance plus marquée de $I(z)$ quand z décroît. Il en est donc de même de $k_1(z)$.

L'allure de la courbe est donc la suivante (en prenant l'équation donnée dans l'énoncé pour $I(z)$; on a tracé $\frac{k_1(z)}{\alpha I_\infty}$ en fonction de z , en km) :



L'ozone ne peut se former que si :

- la concentration en O_2 est suffisante car O_2 est la « matière première » à partir de laquelle O_3 est produit ;
- le rayonnement UV est d'intensité suffisante (la première étape est une photolyse) (i.e. $k_1(z)$ pas trop faible), ce qui suppose que la concentration en O_2 ne soit pas trop élevée, sans quoi les UV sont absorbés.

On en déduit que la concentration n_{O_3} doit présenter un maximum à une certaine altitude dans la stratosphère, résultant d'un compromis entre une concentration n_{O_2} pas trop faible mais pas trop élevée non plus pour que $I(z)$ et donc $k_1(z)$ soient suffisants.

Q14 D'après le document A2,

$$n_{O_3}(z) = \sqrt{\frac{k_2 k_1(z)}{k_3 k_4}} n_{O_2}(z)$$

Par conséquent :

$$n_{O_3}(z) = n_0 \sqrt{\frac{\alpha I_\infty k_2}{k_3 k_4}} \exp \left[-\frac{z}{H} - \frac{H n_0 \sigma_{O_2}}{\beta} \exp \left(-\frac{z}{H} \right) \right]$$

La fonction exponentielle étant croissante, il s'agit donc de chercher le maximum de la fonction $f(z) = -\frac{z}{H} - \beta \exp \left(-\frac{z}{H} \right)$ où $\beta = H n_0 \sigma_{O_2} \approx 39$. On calcule sa dérivée :

$$f'(z) = \frac{1}{H} \left(\beta \exp \left(-\frac{z}{H} \right) - 1 \right)$$

Celle-ci s'annule pour

$$z_{\max} = H \ln \beta \approx 26 \text{ km}$$

D'autre part, l'énoncé fournit la valeur $k_1(z = 50 \text{ km}) = 3.10^{-12} \text{ s}^{-1}$. Or,

$$k_1(z) = \alpha I_\infty \exp \left[-\beta \exp \left(-\frac{z}{H} \right) \right]$$

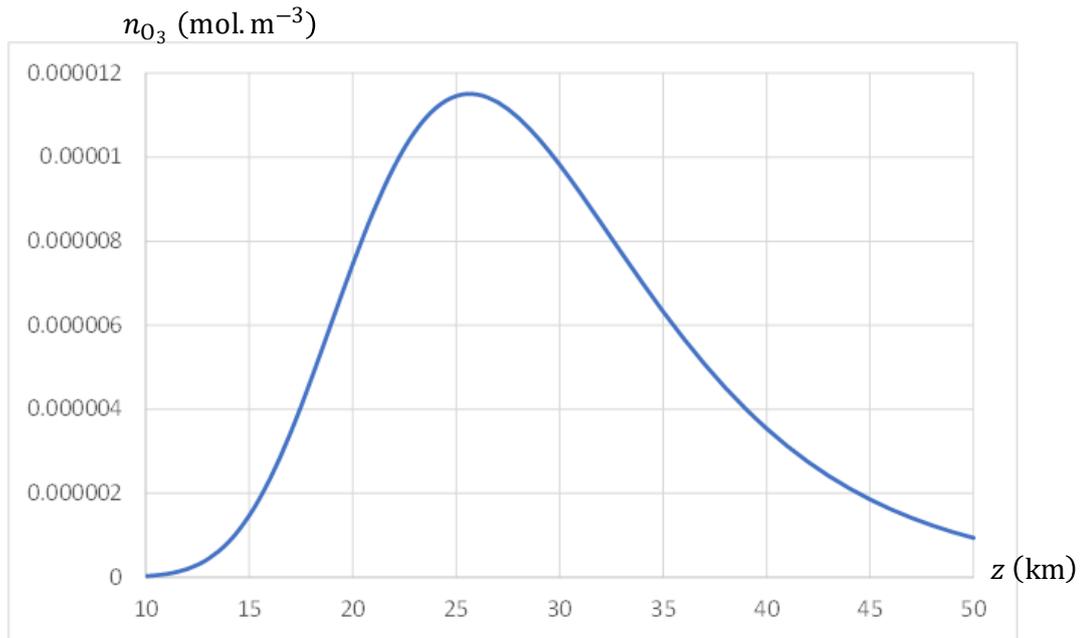
On en déduit $\alpha I_\infty = 3,1.10^{-12} \text{ s}^{-1}$. On en déduit :

$$n_{O_3, \max} = n_0 \sqrt{\frac{\alpha I_\infty k_2}{k_3 k_4}} \exp[-\ln \beta - \beta \exp(-\ln \beta)] = n_0 \sqrt{\frac{\alpha I_\infty k_2}{k_3 k_4}} \exp[-\ln \beta - 1]$$

Numériquement, on trouve :

$$n_{O_3, \max} \approx 1,2.10^{-5} \text{ mol. m}^{-3}$$

Par curiosité (mais ce n'était pas demandé), voici la courbe donnant $n_{O_3}(z)$:



2. Modélisation linéaire de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

Q15 On écrit l'équation locale de la statique des fluides en projection sur l'axe Oz :

$$dp = -\rho g dz$$

Q16 L'équation d'état des gaz parfaits donne $\rho = \frac{Mp}{RT_0}$. On en déduit :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$$

On intègre entre $z = 0$ et z et on obtient :

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)$$

Q17 Une mesure grossière au double décimètre donne une épaisseur du nuage de l'ordre de $h = 850$ m. Or, $H = \frac{RT_0}{Mg} = 7,97$ km $\approx 8,0$ km. Le rapport de la pression en haut du nuage sur la pression en bas du nuage vaut donc :

$$\frac{p_{\text{haut}}}{p_{\text{bas}}} = \exp\left(-\frac{h}{H}\right)$$

La variation de pression relative vaut donc :

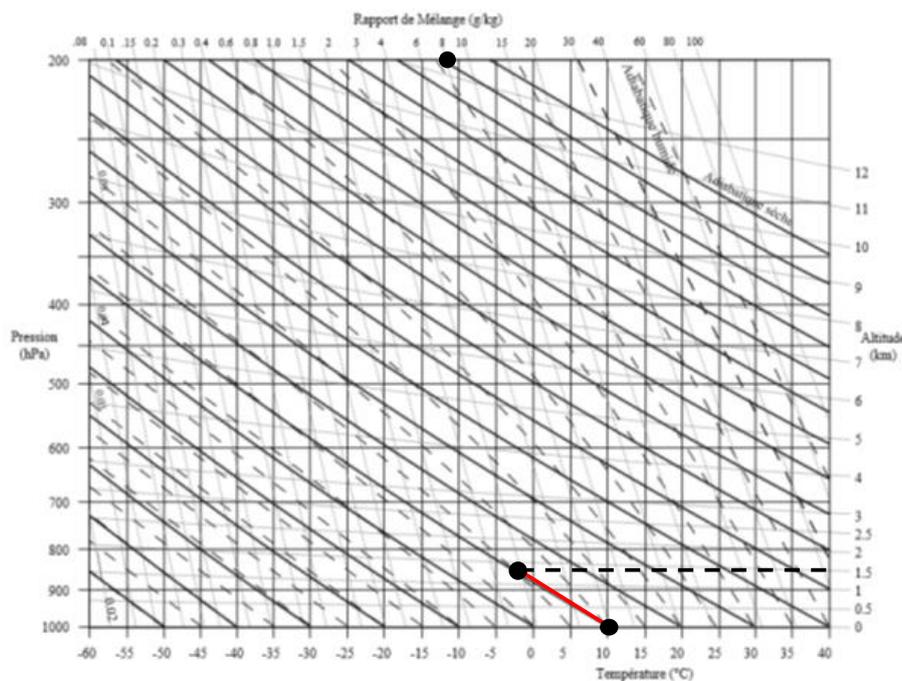
$$\frac{p_{\text{haut}} - p_{\text{bas}}}{p_{\text{bas}}} = \exp\left(-\frac{h}{H}\right) - 1 \approx -10,1 \%$$

On est à la limite de validité de l'approximation, mais c'est sans doute acceptable...

Q18 On envisage le scénario suivant :

- Sous l'effet du vent, la masse d'air humide **s'élève** le long de la montagne.
- Comme **l'altitude augmente, la pression diminue**. L'air subit donc une **détente**. Le travail des forces de pression subies par une particule de fluide est donc négatif.
- Cette détente étant **rapide**, elle est **adiabatique**.
- Elle s'accompagne donc d'un **refroidissement**. En effet, le premier principe appliqué à une particule de fluide s'écrit : $\Delta U = C_V \Delta T = W_{\text{press}} < 0$.
- Ce refroidissement entraîne une **diminution de la pression $p_s(T)$ de vapeur saturante** de l'eau.
- On en déduit que **l'humidité relative $HR = 100 \frac{p_{\text{vap}}}{p_s(T)}$ augmente**.
- Celle-ci atteint éventuellement **le seuil de saturation $HR = 100$. Le nuage est alors formé**.

Q19



On part du point situé à $z = 0$ (niveau du sol, notion vague...) pour lequel $T = 10^\circ\text{C}$ (on remarque que ce point est relié par une courbe en gris clair au point noté $r = 8 \text{ g/kg}$: c'est cohérent avec les données de l'énoncé).

On suit une adiabatique sèche (pas encore d'eau liquide présente), jusqu'au premier point d'intersection avec une adiabatique humide (formation de la première goutte d'eau liquide). On lit l'altitude correspondante (par rapport au niveau du sol) : $z \approx 1,5 \text{ km}$.

Sur la photo, on estime le bas du nuage à une altitude valant environ $z \approx 4,0 \text{ km}$. Les résultats ne concordent pas...

Q20 Comme l'écoulement est stationnaire, le débit de masse se conserve. Donc D_{m1} et D_{m2} sont indépendants de x (mais $D_{m1} \neq D_{m2}$, bien sûr).

Comme l'écoulement est incompressible, le débit de volume se conserve aussi. Donc D_{v1} et D_{v2} sont indépendants de x (mais $D_{v1} \neq D_{v2}$, bien sûr).

Q21 L'air chaud a une densité inférieure à l'air froid : $\rho_1 < \rho_2$.

Si $D_{m1} = D_{m2}$, $\rho_1 S v_1 = \rho_2 S v_2$. On en déduit :

$$v_1 > v_2$$

Q22 La contrainte visqueuse exercée de bas en haut est donnée par :

$$\vec{C}_{\text{visc}} = \frac{d\vec{F}}{dS} = -\eta \frac{dv_x}{dz} \vec{u}_x$$

Le signe «-» traduit le fait que si $\frac{dv_x}{dz} > 0$ (comme ici), les couches inférieures de fluide, moins rapides, freinent les couches supérieures de fluide, plus rapides.

Q23 Le nombre de Reynolds est de l'ordre de :

$$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\eta} \approx \frac{1 \times (40 \times 3,6) \times 10^3}{10^{-5}} \approx 10^{10}$$

On en déduit que la convection domine très largement la viscosité. Les contraintes visqueuses étant négligeables, il est raisonnable de supposer $\frac{dv_x}{dz} \approx 0$ dans les deux zones : le modèle de profil uniforme de vitesse proposé est donc adapté.

Q24 Considérons une ligne de courant \mathcal{L} de l'écoulement. Si l'écoulement est stationnaire, parfait, incompressible et homogène, le théorème de Bernoulli stipule que :

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z = \text{constante}(\mathcal{L})$$

Q25 Cf cours.

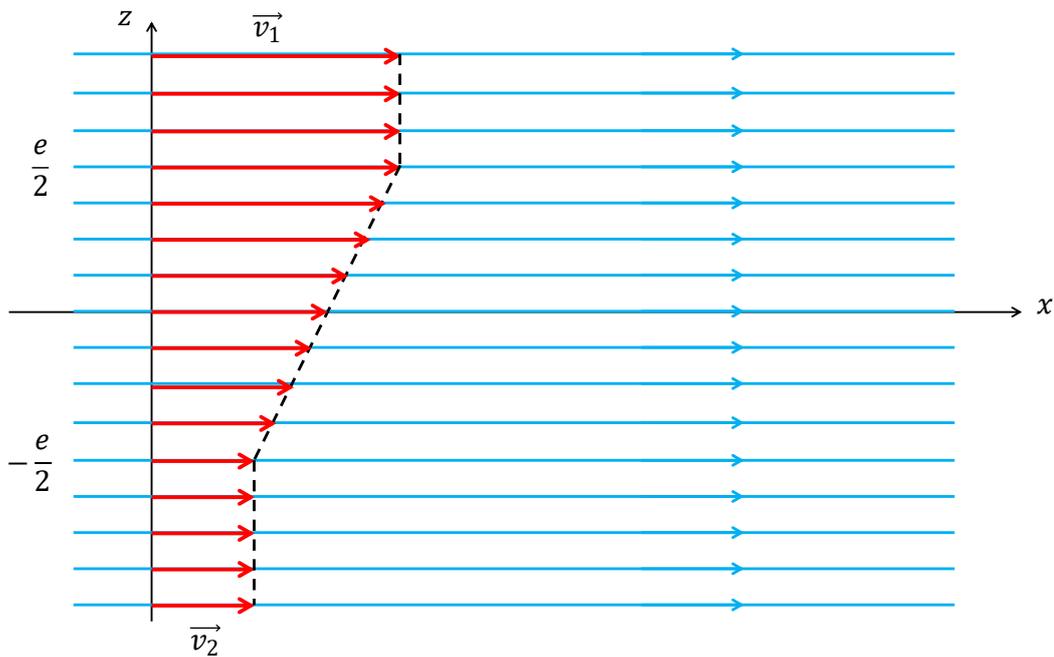
Q26 La continuité du champ de vitesse en $z = \pm \frac{e}{2}$ impose :

$$\begin{cases} \langle v \rangle + \frac{\gamma}{2} = v_1 \\ \langle v \rangle - \frac{\gamma}{2} = v_2 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \langle v \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2} \\ \gamma = v_1 - v_2 \end{cases}$$

Q27



Q28 On a bien $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ pour toute valeur de z : l'écoulement ainsi décrit est bien incompressible (et homogène).

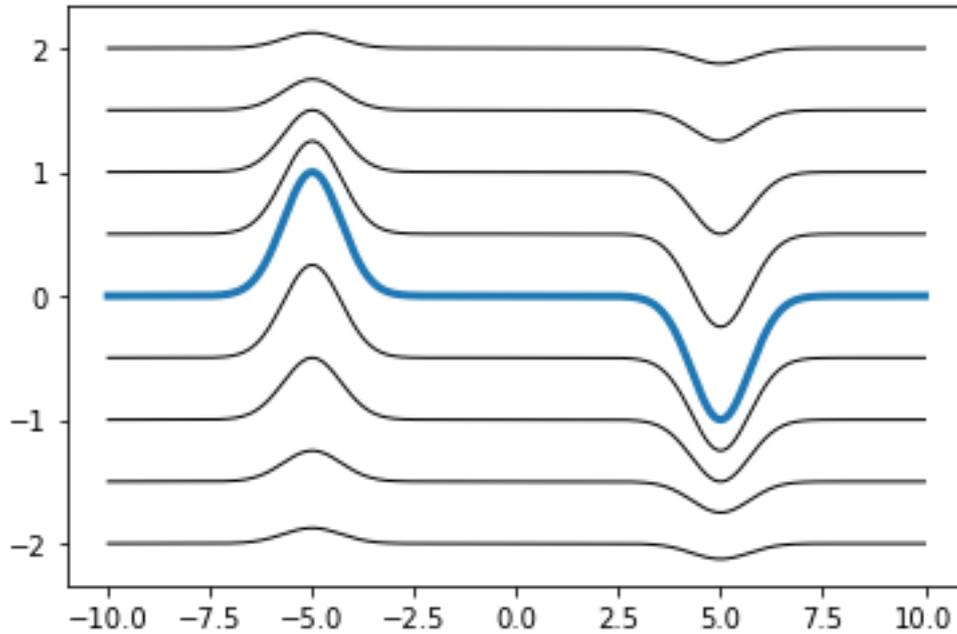
Pour $|z| \geq \frac{e}{2}$, l'écoulement est uniforme donc $\frac{dv_x}{dz} = 0$: il n'y a pas de contrainte visqueuse. C'est compatible avec un écoulement parfait.

En revanche, pour $|z| \leq \frac{e}{2}$, $\frac{dv_x}{dz} = \frac{\gamma}{e} = \frac{v_1 - v_2}{e} \neq 0$: il y a donc des contraintes visqueuses dans la zone de mélange. L'écoulement n'y est pas parfait.

Q29 Au niveau d'une **bosse** de déformation (comme sur la figure 5), la section du tube de courant d'air chaud diminue tandis que la section du tube de courant d'air froid augmente. La conservation du débit de volume entraîne donc une **augmentation de v_1** et une **diminution de v_2** . Les lignes de courant d'air **chaud se resserrent** tandis que les lignes de courant d'air **froid s'écartent**.

Au niveau d'un **creux** de déformation, la situation est inversée : **v_1 diminue** tandis que **v_2 augmente**.

L'allure des lignes de courant au voisinage d'une bosse et d'un creux est la suivante :



- Q30** Comme l'écoulement est stationnaire, parfait, incompressible et homogène au-dessus et au-dessous de la ligne de séparation, le théorème de Bernoulli s'applique. En considérant deux lignes de courant \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 horizontales situées au voisinage de la ligne de séparation, on peut écrire :

$$\begin{cases} p_1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{2} = \text{constante}(\mathcal{L}_1) \\ p_2 + \frac{\rho_2 v_2^2}{2} = \text{constante}(\mathcal{L}_2) \end{cases}$$

Au niveau d'une bosse, v_1 augmente tandis que v_2 diminue. On en déduit que p_1 diminue tandis que p_2 augmente. Il y a donc apparition d'une surpression sous la bosse et d'une dépression au-dessus de la bosse. On a donc un gradient de pression vertical $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$. Ce gradient de pression tendra à soulever la bosse encore davantage. La déformation initiale est donc amplifiée.

Au niveau d'un creux, v_1 diminue tandis que v_2 augmente. On en déduit que p_1 augmente tandis que p_2 diminue. Il y a donc apparition d'une dépression sous la bosse et d'une surpression au-dessus de la bosse. On a donc un gradient de pression vertical $\frac{\partial p}{\partial z} > 0$. Ce gradient de pression tendra à creuser le creux encore davantage. La déformation initiale est donc amplifiée.

Le système est donc instable : c'est l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

- Q31** La connaissance de la fonction courant $\Psi(x, z, t)$ permet de tracer les lignes de courant. En effet, l'équation d'une ligne de courant \mathcal{L} s'écrit, à un instant donné :

$$\Psi(x, z, t) = \text{constante}(\mathcal{L})$$

L'analogie des lignes de niveau d'une carte topographique est ici les lignes iso-valeurs de la fonction courant $\Psi(x, z, t)$: il s'agit des lignes de courant de l'écoulement.

- Q32** Dans chaque domaine $i = 1$ ou 2 , $v_b = v_i$ est uniforme. Donc dans chaque domaine, $\frac{d^2 v_b}{dz^2} = 0$. D'autre part, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \exp i(kx - \omega t)$. Enfin, par hypothèse, $v_b \neq \underline{c}$. On en déduit, dans chaque domaine :

$$\frac{d^2 \Phi_i}{dz^2} - k^2 \Phi_i = 0$$

- Q33** La résolution de l'équation différentielle précédente donne, dans chaque domaine :

$$\begin{cases} \Phi_1(z) = \alpha_1 \exp(kz) + \beta_1 \exp(-kz) & \text{pour } z \geq 0 \\ \Phi_2(z) = \alpha_2 \exp(kz) + \beta_2 \exp(-kz) & \text{pour } z \leq 0 \end{cases}$$

La non-divergence de ces deux fonctions impose $\alpha_1 = 0$ et $\beta_2 = 0$.

La condition aux limites en $z = 0$ entraîne : $\beta_1 = A_1$ et $\alpha_2 = A_2$. On en déduit :

$$\begin{cases} \Phi_1(z) = A_1 \exp(-kz) \\ \Phi_2(z) = A_2 \exp(kz) \end{cases}$$

- Q34** Le système linéaire homogène en (A_1, A_2) n'admet de solution non identiquement nulle que si les deux équations sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire proportionnelles. Le déterminant du système doit donc être nul :

$$(v_1 - \underline{c})^2 + (v_2 - \underline{c})^2 = 0$$

On peut récrire cette équation sous la forme :

$$(v_1 - \underline{c})^2 = -(v_2 - \underline{c})^2$$

c'est-à-dire :

$$v_1 - \underline{c} = \pm i(v_2 - \underline{c})$$

On en déduit :

$$\underline{c}^\pm = \frac{v_1 \mp i v_2}{1 \mp i} = \frac{(v_1 \mp i v_2)(1 \pm i)}{2}$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\underline{c}^\pm = \frac{v_1 + v_2}{2} \pm i \left(\frac{v_1 - v_2}{2} \right) = \langle V \rangle \pm i \frac{\Gamma}{2}$$

avec :

$$\begin{cases} \langle V \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2} \\ \Gamma = v_1 - v_2 \end{cases}$$

Q35 Par définition, $\underline{c} = \frac{\omega}{k}$. La relation de dispersion s'écrit donc :

$$\underline{\omega}^{\pm} = k\langle V \rangle \pm i \frac{k\Gamma}{2}$$

Q36 La fonction courant complexe s'écrit :

$$\underline{\Psi}(x, z, t) = \Phi(z) \exp i(kx - (\omega_{\text{re}} + i\omega_{\text{im}})t) = \Phi(z) \exp(\omega_{\text{im}}t) \exp i(kx - \omega_{\text{re}}t)$$

La fonction courant réelle s'écrit donc :

$$\Psi(x, z, t) = \Phi(z) \exp(\omega_{\text{im}}t) \cos(kx - \omega_{\text{re}}t)$$

Elle contient donc un facteur de propagation $\cos(kx - \omega_{\text{re}}t)$ que l'on peut mettre sous la forme :

$$\cos(kx - \omega_{\text{re}}t) = \cos\left[k\left(x - \frac{\omega_{\text{re}}}{k}t\right)\right]$$

On voit donc apparaître naturellement la vitesse de propagation de la phase de l'onde, ou vitesse de phase :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega_{\text{re}}}{k}$$

$\omega_{\text{re}} = \text{Re}(\underline{\omega})$ a la même valeur pour les deux branches $\underline{\omega}^{\pm}$: $\omega_{\text{re}} = k\langle V \rangle$. Par conséquent :

$$v_{\varphi} = \langle V \rangle$$

Q37 La vitesse de phase est la même pour les deux branches de propagation et elle est positive. Par conséquent, l'onde se propage vers les x croissants dans les deux cas.

D'autre part, $v_{\varphi} = \langle V \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2}$ ne dépend pas de k (ou de ω_{re} , ce qui revient au même). Il n'y a donc pas dispersion.

Q38 Au vu des résultats précédents, $\omega_{\text{im}} = \pm \frac{k\Gamma}{2} = \pm\sigma$ et $kz = \frac{z}{\delta}$. On en déduit :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{k\Gamma}{2} \\ \delta = \frac{1}{k} \end{cases}$$

On a donc finalement :

$$\begin{cases} \Psi(x, z \geq 0, t) = A_1 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp(\pm\sigma t) \cos[k(x - \langle V \rangle t)] \\ \Psi(x, z \leq 0, t) = A_2 \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \exp(\pm\sigma t) \cos[k(x - \langle V \rangle t)] \end{cases}$$

Q39 L'instabilité ne peut se développer au cours du temps que si le facteur $\exp(\pm\sigma t)$ est croissant. Cela correspond donc au cas $\omega_{\text{im}} = +\frac{k\Gamma}{2} = +\sigma$. Il s'agit donc de la branche

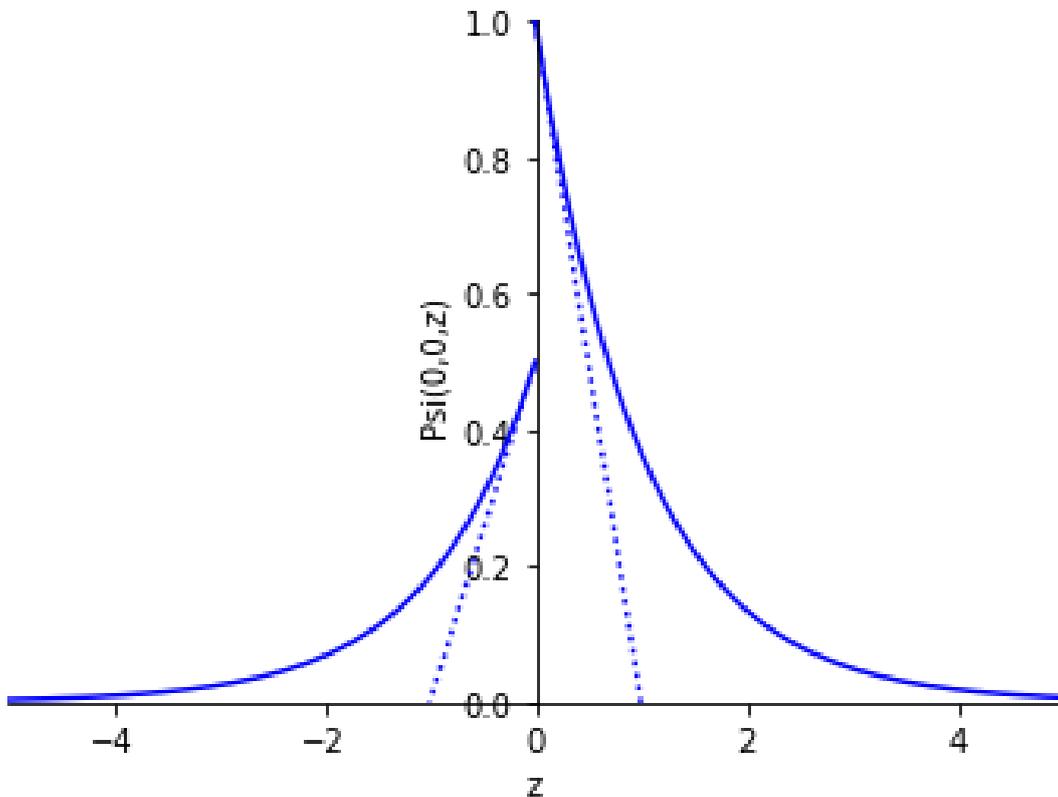
$$\underline{\omega}^+ = k\langle V \rangle + i \frac{k\Gamma}{2}$$

Le facteur d'amplification $\exp(\sigma t) = \exp\left(\frac{k\Gamma}{2}t\right)$ est d'autant plus grand que $\Gamma = v_1 - v_2$ est plus grand.

Q40 On se place dans le cas où l'instabilité se développe. La fonction courant s'écrit donc finalement :

$$\begin{cases} \Psi(x, z \geq 0, t) = A_1 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp(\sigma t) \cos[k(x - \langle V \rangle)t] \\ \Psi(x, z \leq 0, t) = A_2 \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \exp(\sigma t) \cos[k(x - \langle V \rangle)t] \end{cases}$$

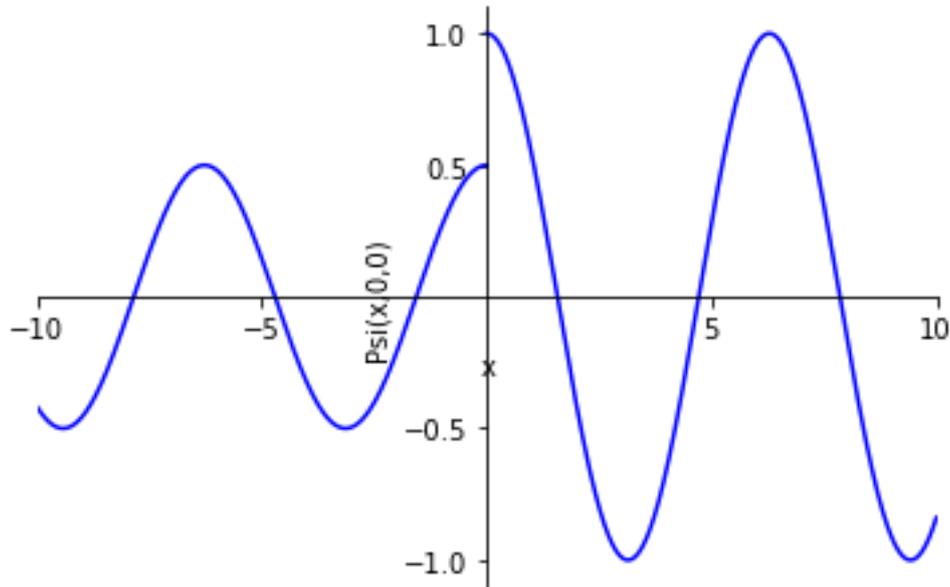
Q41 Voici l'allure du profil de $\Psi(0, z, 0)$ pour lequel on a choisi $A_1 = 1$, $A_2 = 0,5$ et $\delta = 1$ en unités arbitraires :



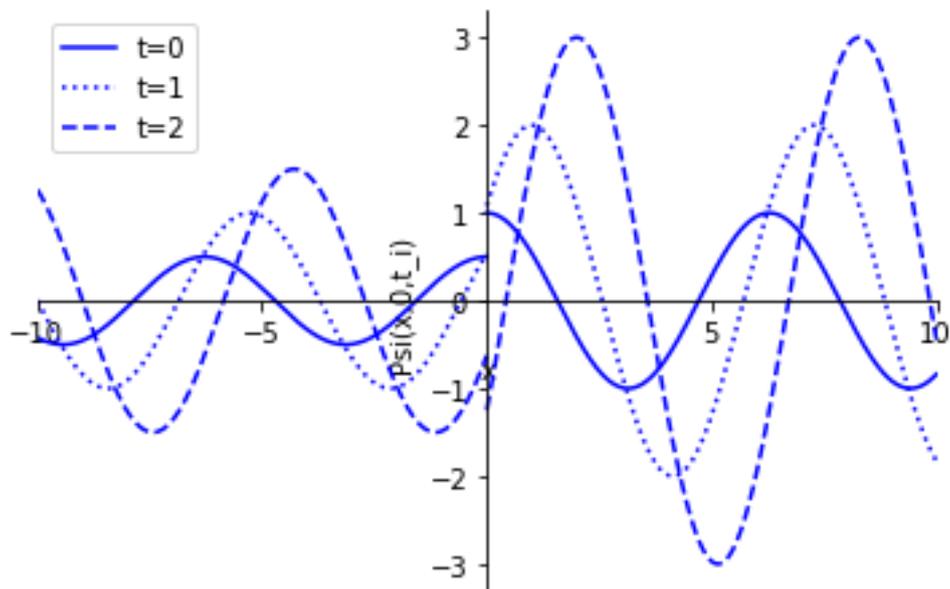
δ est la distance caractéristique de décroissance de $\Psi(0, z, 0)$ autour de l'altitude moyenne de la couche de mélange. On peut donc assimiler 2δ à l'épaisseur du nuage ondulé.

Lorsque t varie, $\Psi(0, z, t) \propto \exp\left(\pm \frac{z}{\delta}\right) \exp(\sigma t) \cos(k\langle V \rangle t)$. Par conséquent, $\Psi(0, z, t)$ voit son amplitude augmenter au cours du temps à cause du facteur $\exp(\sigma t)$ et $\Psi(0, z, t)$ change périodiquement de signe à cause du facteur $\cos(k\langle V \rangle t)$.

Q42 Voici l'allure du profil de $\Psi(x, 0, 0)$ pour lequel on a choisi $A_1 = 1, A_2 = 0,5$ et $k = 1$ en unités arbitraires :



Lorsque t varie, $\Psi(x, 0, t) \propto \exp(\sigma t) \cos[k(x - \langle V \rangle t)]$. Par conséquent, $\Psi(x, 0, t)$ voit son amplitude augmenter au cours du temps à cause du facteur $\exp(\sigma t)$ et $\Psi(x, 0, t)$ se propage vers les x croissants à cause du facteur $\cos[k(x - \langle V \rangle t)]$:



Q43 Le temps caractéristique de développement de l'instabilité correspond à la constante de temps τ définie par :

$$\exp\left(\frac{t}{\tau}\right) = \exp(\sigma t)$$

Par conséquent,

$$\tau = \frac{1}{\sigma} = \frac{2}{k\Gamma}$$

- **Première proposition :**

Le module du vecteur d'onde est donné par

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

où λ est la longueur d'onde, ou période spatiale du phénomène selon l'axe Ox . Sur la photo 2, on observe 6 périodes spatiales et on mesure (au double décimètre) une distance d'environ 3,2 km. Donc $\lambda \approx 540$ m.

On en déduit :

$$\tau = \frac{\lambda}{\pi\Gamma} \approx 17 \text{ s}$$

- **Deuxième proposition :**

D'après la question Q41, on peut estimer que l'épaisseur de la zone de transition, c'est-à-dire du nuage ondulé vaut environ $e \approx 2\delta = \frac{2}{k}$. On mesure e au double décimètre sur la photo et on trouve $e \approx 600$ m. Par conséquent :

$$\tau = \frac{2}{k\Gamma} \approx \frac{e}{\Gamma} \approx 60 \text{ s}$$

Certes, il y a un rapport 3,5 entre les deux estimations mais l'ordre de grandeur reste le même. Il s'agit d'une durée courte à notre échelle. C'est donc bien en accord avec l'affirmation de l'énoncé.