

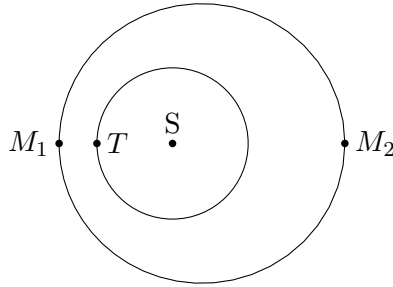
Centrale-Supélec 2019, filière PSI, épreuve de Physique-Chimie 2

Corrigé proposé par JPh Caniparoli ; pour me contacter (erreurs, ...) : artefact.act@wanadoo.fr

I La planète Mars

Q1. Pour pouvoir effectuer un calcul raisonnable, il faut supposer l'une des orbites au moins circulaire. Les données de l'énoncé fournissent une distance Terre-Soleil unique, on considère une orbite terrestre circulaire.

L'année martienne est plus longue que l'année terrestre, donc l'orbite martienne est extérieure à l'orbite terrestre :



— la distance minimale Mars-Terre correspond à un alignement Mars-Terre-Soleil lorsque Mars est à son périhélie :

$$d_{\min} = M_1T = c_0 \Delta t_{\min} = a_{M, \min} - a_T ; a_{M, \min} = a_T + c_0 \Delta t_{\min} = 2,40 \times 10^8 \text{ km}$$

— la distance maximale Mars-Terre correspond à un alignement Mars-Soleil-Terre lorsque Mars est à son aphélie :

$$d_{\max} = TM_2 = \frac{\Delta t_{\max}}{c_0} = a_{M, \max} + a_T ; a_{M, \max} = \frac{\Delta t_{\max}}{c_0} - a_T = 2,46 \times 10^8 \text{ km}$$

On en déduit le demi-grand axe de l'orbite de Mars

$$a_M = \frac{a_{M, \max} + a_{M, \min}}{2} = c_0 \frac{\Delta t_{\max} + \Delta t_{\min}}{2} = 2,43 \times 10^8 \text{ km}$$

Q2. On utilise la troisième loi de Kepler pour Mars et Terre :

$$\frac{a_M^3}{T_M^2} = \frac{a_T^3}{T_T^2} : a_M = a_T \left(\frac{T_M}{T_T} \right)^{2/3} = 2,29 \times 10^8 \text{ km}$$

comparable avec la valeur précédente

D'autre part

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} : M_s = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Q3. D'après la loi de la gravitation universelle, comparée entre les surfaces terrestre et martienne :

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{m_M}{m_T} \left(\frac{R_T}{R_M} \right)^2 = \frac{\mu_M R_M^3}{\mu_T R_T^3} \left(\frac{R_T}{R_M} \right)^2 = \frac{d_M R_M}{d_T R_T} = 0,38 : g_M = 0,38 g_T = 3,7 \text{ m s}^{-2}$$

II Tempête sur Mars

II.A - L'atmosphère martienne

Q4. Le pourcentage de dioxygène est comparable à la valeur usuelle à la surface terrestre. Cependant la pression totale $P = 4,75 \text{ PSI} = 0,33 \text{ bar}$ est trois fois plus faible qu'à la surface terrestre, donc la pression partielle de dioxygène est trois fois plus faible qu'à la surface terrestre : Mark Watney est en sous oxygénation (la valeur de la pression est de l'ordre de grandeur de la pression à environ 8 km d'altitude).

Q5. La loi du gaz parfait $PV = nRT$ donne $P = \frac{\rho RT}{M}$. L'atmosphère martienne est constitué majoritairement de CO_2 (95%, $M = 44 \text{ g mol}^{-1}$), donc on peut estimer, avec $P_M = 0,11 \text{ PSI} = 758 \text{ Pa}$

$$\rho = \frac{PM(\text{CO}_2)}{RT_M} = 0,02 \text{ kg m}^{-3}$$

valeur environ 50 fois plus faible qu'à la surface terrestre

Q6.

- point triple : point d'équilibre des phases solide, liquide et gaz
- point critique : point au-delà duquel il n'y a plus de distinction entre phase liquide et gaz

Q7. Sur Mars, $P = 758 \text{ Pa} > 611 \text{ Pa}$, $T = -62^\circ\text{C} < 0,01^\circ\text{C}$. Comme la courbe d'équilibre liquide-solide est pratiquement verticale, l'eau à la surface de Mars est à l'état solide.

Q8.

- la pression partielle de dioxygène devient identique à celle de la surface martienne : $P_{\text{O}_2} = 1,4 \times 10^{-3} P_M = 1,1 \text{ Pa}$ très faible : asphyxie ;
- la table de pression saturante de l'eau donne $P_{\text{sat}}(15^\circ\text{C}) = 1705,6 \text{ Pa}$ et $P_{\text{sat}}(20^\circ\text{C}) = 2338,8 \text{ Pa}$, donc si la température dans la combinaison reste égale à $18,5^\circ\text{C}$, la pression s'égalisant avec la pression martienne (758 Pa), l'eau se vaporise, d'où des risques de lésions pulmonaires importants (perte d'eau, rupture des membranes cellulaires et destruction des cellules tapissant les alvéoles pulmonaires).

II.B - Une tempête martienne peut-elle faire basculer le VAM

Q9. On reprend la valeur $g_M = 3,7 \text{ m s}^{-2}$, d'où

$$P = m_{\text{VAM}} g_M = 3,7 \times 10^4 \text{ N}$$

Q10. La calcul du nombre de Reynolds donne avec $\rho = 0,02 \text{ kg m}^{-3}$ masse volumique de l'atmosphère martienne, $D = 10 \text{ m}$ diamètre du cylindre, $V_\infty = 120 \text{ km h}^{-1} = 33 \text{ m s}^{-1}$ la vitesse de l'écoulement en amont du cylindre, et $\eta = 1,07 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$ la viscosité du dioxyde de carbone composant l'atmosphère martienne

$$Re = \frac{\rho D V_\infty}{\eta} = 6,2 \times 10^5$$

On lit sur le diagramme figure 9 la valeur du coefficient de traînée $c_D = 0,3$, puis en utilisant la définition de ce coefficient $c_D = \frac{F_D/(DL)}{\rho V_\infty^2/2}$ donnée sur l'axe des ordonnées du même graphique :

$$F_D = c_D \frac{\rho V_\infty^2}{2} DL = 890 \text{ N}$$

Le calcul du vent produisant la même force à la surface terrestre est difficile sans faire d'hypothèses a priori, et nécessite une démarche de type essai-erreur. À la surface de la Terre, pour des conditions usuelles ($P \approx 1 \text{ bar}$, $T \approx 300 \text{ K}$, avec $\mathcal{M} = 29 \text{ g mol}^{-1}$) la masse volumique vaut $\rho_T = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$. L'égalité de la force de traînée s'écrit

$$F_D = c_D(Re_T) \frac{\rho_T V_{\infty,T}^2}{2} DL = c_D(Re_M) \frac{\rho_M V_{\infty,M}^2}{2} DL : c_D(Re_T) \rho_T V_{\infty,T}^2 = c_D(Re_M) \rho_M V_{\infty,M}^2$$

- Si on néglige dans un premier temps les variations de c_D ($c_D < 3$ couvre la plage $Re > 10$ ce qui correspond certainement à la situation), la condition s'écrit de manière approchée $\rho_T V_{\infty,T}^2 \approx \rho_M V_{\infty,M}^2$ soit $V_{\infty,T} \approx \sqrt{\frac{\rho_M}{\rho_T}} V_{\infty,M} = 4,3 \text{ m s}^{-1}$.
- cet ordre de grandeur permet de calculer $Re_T = 3 \times 10^6$ valeur pour laquelle $c_D = 0,8$.
- on reprend le calcul avec cette estimation de c_D :

$$V_{\infty,T} \approx \sqrt{\frac{c_D(Re_M) \rho_M}{c_D(Re_T) \rho_T}} V_{\infty,M} = 2,6 \text{ m s}^{-1}$$

qui conduit à $Re = 3,5 \times 10^6$, valeur pour laquelle $c_D \approx 0,7$: on peut alors considérer que $V_{\infty,T} \approx 2,6 \text{ m s}^{-1} \approx 10 \text{ km h}^{-1}$, beaucoup plus faible que le vent martien.

Remarques : les valeurs données correspondent à un cas particulier puisque situé très près de la crise de traînée : la convergence des approximations n'est pas très bonne, mais la plage de vitesses correspondante est limitée.

Cette question n'est pas indiquée comme question ouverte, mais les candidats sont très peu guidés : où s'arrêter dans les calculs ?

Q11. On se place dans une situation statique, avec $\alpha \rightarrow 0$ (limite du basculement). Par symétrie, on peut supposer que les actions de traînée sont réparties uniformément sur la hauteur du cylindre, donc que leur résultante s'applique à mi-hauteur. L'équilibre des moments au point O (où le moment de la réaction du sol est nul) s'écrit en projection sur l'axe de rotation perpendiculaire à la direction du vent :

$$0 = -PR + F_D \frac{H}{2} = -PR + c_D \frac{\rho V^2}{4} DH^2 : V_\infty = \sqrt{\frac{2P}{\rho c_D H^2}} = 1,5 \times 10^2 \text{ m s}^{-1} = 5,5 \times 10^2 \text{ km h}^{-1}$$

Valeur très supérieure à la vitesse maximale mesurée : il n'y a pas de risque (si le véhicule est sur un sol horizontal)

III dimensionnement des panneaux solaires

Q12. La pompe à chaleur à pour but de fournir de la chaleur au module caractérisée par une puissance thermique $P_{th} > 0$ fournie au module, son fonctionnement nécessite un travail caractérisé par une puissance utile P_u . Le rendement est défini par le rapport

$$e = \frac{P_{th}}{P_u}$$

et sa valeur maximale définit le rendement de Carnot.

On utilise le fluide caloporteur dans son ensemble, constituant un système fermé en écoulement stationnaire sur lequel on applique les deux principes de la thermodynamique. L'état global du fluide est stationnaire (ni entrée ni sortie). Il reçoit :

- une puissance thermique $P_c = -P_{th} < 0$ de la source chaude (l'intérieur du module à T_i , le fluide cède de la chaleur au module) ;
- une puissance thermique P_f de la source froide (atmosphère martienne à T_e) ;
- une puissance P associée au travail nécessaire au fonctionnement.

Les 2 principes s'écrivent pour le fluide

$$0 = P_c + P_f + P ; 0 = \frac{P_c}{T_i} + \frac{P_f}{T_e} + \frac{\delta S_{\text{créé}}}{dt} \geq \frac{P_c}{T_i} + \frac{P_f}{T_e}$$

soit d'après le premier principe

$$e = \frac{P_{th}}{P_u} = \frac{-P_c}{-P_c - P_f} = \frac{1}{1 + P_f/P_c}$$

et d'après le second principe, avec $P_c < 0$ et $P_f > 0$ et $T_i > T_e > 0$

$$\frac{P_c}{T_i} + \frac{P_f}{T_e} \leq 0 : \frac{P_f}{P_c} \geq \frac{-T_e}{T_i} ; 1 + \frac{P_f}{P_c} \geq 1 - \frac{T_e}{T_i} \geq 0$$

on en déduit, avec $T_i = 20^\circ\text{C} = 293\text{K}$ et $T_e = -62^\circ\text{C} = 211\text{K}$

$$e = \frac{1}{1 + P_f/P_c} \leq \frac{T_i}{T_i - T_e} = 3,6 = e_{\text{max}}$$

Q13. La résistance thermique peut être estimée dans une approximation plane (l'énoncé ne précise d'ailleurs pas si le rayon donné est le rayon intérieur ou le rayon extérieur) :

$$R_{th} \approx \frac{e}{\lambda S} = \frac{e}{2\pi\lambda RL} = 0,27\text{K W}^{-1}$$

Dans un calcul plus détaillé, on utilise la conservation du flux thermique supposé radial et la loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$

$$\phi_{th} = 2\pi r L j_{th,r}(r) : j_{th,r}(r) = \frac{\phi_{th}}{2\pi r L} = -\lambda \frac{dT}{dr}$$

d'où l'équation

$$\frac{dr}{r} = -\frac{2\pi\lambda L}{\phi_{th}} dT$$

qui s'intègre en supposant que le rayon R est le rayon intérieur

$$\ln\left(\frac{R+e}{R}\right) = -\frac{2\pi\lambda L}{\phi_{th}}(T_e - T_i)$$

Le flux étant dirigé vers l'extérieur, on obtient

$$R_{th} = \frac{T_i - T_e}{\phi_{th}} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R}{R-e}\right) = 0,25 \text{ K W}^{-1}$$

valeur proche de la valeur approchée précédente (à 10% près, l'absence de précision sur rayon intérieur/rayon extérieur, conduit à une variation maximale de 20%, car si on prend pour rayon extérieur R , $R_{th} = 0,29 \text{ K W}^{-1}$).

Q14. En régime stationnaire, la pompe à chaleur doit compenser les pertes thermiques à travers les parois du module :

$$\frac{T_i - T_e}{R_{th}} = P_{th} = e\mathcal{P}_M$$

Soit avec une efficacité égale à 34% de l'efficacité maximale calculée précédemment

$$\mathcal{P}_M = \frac{T_i - T_e}{R_{th}e} = 250 \text{ W}$$

Q15. En tenant compte du rendement de conversion η des panneaux solaires

$$\mathcal{P}_M = \eta P_s S$$

d'où

$$S = \frac{\mathcal{P}_M}{\eta P_s} = 2,5 \text{ m}^2$$

Cette valeur semble cohérente avec la photographie présentée (panneaux de l'ordre de 75 cm \times 1,2 m soit $S \approx 2,7 \text{ m}^2$).

IV Sauvetage de Mark Watney par le vaisseau Hermès

IV.A - Trajectoire du vaisseau Hermès

Q16. Le périhélie de l'orbite de transfert est situé sur l'orbite terrestre, son aphélie sur l'orbite de martienne

$$a = \frac{a_T + a_M}{2} = 1,89 \times 10^8 \text{ km}$$

Q17. Le transfert se fait sur une demi-orbite, donc la durée du transfert $T_{\text{transfert}}$ est égale à la moitié de la période de révolution sur l'orbite de transfert. On utilise encore une fois la troisième loi de Kepler,

$$\frac{a^3}{(2T_{\text{transfert}})^2} = \frac{a_M^3}{T_M^2} : T_{\text{transfert}} = \frac{T_M}{2} \left(\frac{a}{a_M}\right)^{3/2} = 259 \text{ j}$$

L'énoncé ne précise pas que les sens de parcours des orbites sont identiques (imposés par la Terre et Mars, et de manière à limiter les vitesses relatives pour le vaisseau). Les orbites de Mars et de la Terre sont supposées circulaires donc parcourues à vitesse angulaire $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ constante d'après la loi des aires. Si on choisit l'origine des angles au point M_1 :

- la position initiale de la Terre T_0 correspond à $\theta_{T0} = -\pi$;
- la position initiale de Mars M_0 est donnée par

$$\theta_{M0} = \theta_{M1} - \Omega_M T_{\text{transfert}} = -\frac{2\pi}{T_M} T_{\text{transfert}} = -2\pi \frac{T_{\text{transfert}}}{T_M} = -0,75\pi = -136^\circ$$

- la position de la Terre au moment de la fin du transfert est donnée par

$$\theta_{T1} = \theta_{T0} - \Omega_T T_{\text{transfert}} = -\pi + 2\pi \frac{T_{\text{transfert}}}{T_T} = 0,42\pi = 75,3^\circ$$

Q18. Pour effectuer un nouveau transfert Mars et la Terre doivent se retrouver dans la même position relative par rapport au Soleil caractérisée par $\theta_M - \theta_T$. En notant T_s la durée séparant les débuts de 2 transferts et t_0 l'instant auquel le premier transfert débute

$$\theta_T(t_0 + T_s) - \theta_M(t_0 + T_s) = \theta_T(t_0) + 2\pi \frac{T_s}{T_T} - \left(\theta_M(t_0) + 2\pi \frac{T_s}{T_M} \right) = \theta_T(t_0) - \theta_M(t_0)[2\pi]$$

soit la condition

$$T_s \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right) = n, \quad n \in \mathbb{N}$$

La plus petite valeur de T_s , pour $n = 1$ représente le délai minimal entre deux transferts Terre-Mars

$$T_s = \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right)^{-1} = \frac{T_M T_T}{T_M - T_T} = 780 \text{ j}$$

Q19. La position initiale M_0 de la Terre doit être à l'opposé par rapport à la position M_1 de Mars à la fin du transfert vers Mars :

$$\theta_{M1} - \theta_{T0} = \pi$$

De même la position T_3 de la Terre à la fin du transfert de retour doit être à l'opposé de la position M_2 de Mars au départ de ce transfert :

$$\theta_{T3} - \theta_{M2} = \pi[2\pi]$$

Entre la position T_0 et la position T_3 il s'écoule la durée des 2 transferts et le temps d'attente Δt donc

$$\theta_{T3} = \theta_{T0} + 2\pi \frac{2T_{\text{transfert}} + \Delta t}{T_T}$$

De même les positions M_1 et M_2 sont séparées temporellement par la durée d'attente Δt

$$\theta_{M2} = \theta_{M1} + 2\pi \frac{\Delta t}{T_M}$$

On peut donc écrire en remplaçant θ_{T3} et θ_{M2} par leurs expressions

$$\begin{aligned} \theta_{T3} - \theta_{M2} &= \left(\theta_{T0} + 2\pi \frac{2T_{\text{transfert}} + \Delta t}{T_T} \right) - \left(\theta_{M1} + 2\pi \frac{\Delta t}{T_M} \right) \\ &= \theta_{T0} - \theta_{M1} + 2\pi \left(\frac{2T_{\text{transfert}}}{T_T} + \Delta t \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right) \right) \end{aligned}$$

et finalement, en utilisant les conditions $\theta_{M1} - \theta_{T0} = \pi$ et $\theta_{T3} - \theta_{M2} = \pi[2\pi]$

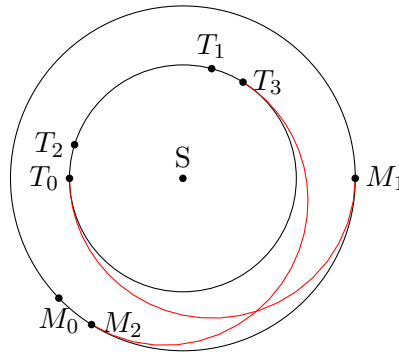
$$\Delta t \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right) + \frac{2T_{\text{transfert}}}{T_T} = 0[2\pi] = n, n \in \mathbb{N}$$

$$\Delta t = \left(n - \frac{2T_{\text{transfert}}}{T_T} \right) \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right)^{-1} = T_s \left(n - \frac{2T_{\text{transfert}}}{T_T} \right)$$

La durée minimale d'attente est obtenue en prenant la valeur minimale de n pour laquelle $\Delta t > 0$, soit pour $2T_{\text{transfert}}/T_T = 1,42$, $n = 2$ et

$$\Delta t = 454 \text{ j}$$

Q20.



Q21. La mission totale Terre-Mars-Terre dure au minimum $2T_{\text{transfert}} + \Delta t = 972 \text{ j}$.

Il faut ici la durée minimale d'une mission totale Mars-Terre-Mars. Pour calculer la durée d'attente sur Terre, on peut reprendre le calcul précédent, ou remarquer que la durée minimale de l'aller-retour Mars-Terre-Mars (nécessairement supérieure à $2T_{\text{transfert}}$) plus le temps d'attente sur Mars précédemment calculé doit correspondre à un nombre entier de périodes synodiques (puisqu'au bout de cette durée le vaisseau peut repartir en direction de la Terre) :

$$t_{M-T-M} + \Delta t = nT_s : t_{M-T-M} = nT_s - \Delta t = 1106 \text{ j} \quad (n = 2)$$

Soit environ 3 ans. L'aller-retour grâce à l'orbite de Hohman n'est donc pas envisageable en 549 j : nécessité d'une trajectoire plus complexe, ou rôle plus important du système de propulsion.

IV.B - La récupération de Mark Watney

Q22. On applique un bilan de quantité de mouvement dans le référentiel de Kepler, en supposant que l'éjection de gaz est pratiquement instantanée. Initialement la station de masse M se déplace à la vitesse V . La masse m_e de gaz est éjectée avec la vitesse v_e par rapport à la station, donc à la vitesse $V + v_e$ par rapport au référentiel de Kepler et après l'éjection de gaz la vitesse de la station a diminué de ΔV . L'ensemble constitue un système fermé, soumis à la seule gravitation, donc on peut négliger l'effet sur la durée de l'éjection supposée très brève : la quantité de mouvement est alors conservée :

$$MV = (M - m_e)(V - \Delta V) + m_e(V + v_e) : m_e(\Delta V + v_e) = M\Delta V$$

Par conséquent, avec $M = 500$ tonnes, $\Delta V = 30 \text{ m s}^{-1}$, $v_e = 500 \text{ m s}^{-1}$

$$m_e = M \frac{\Delta V}{\Delta V + v_e} = 2,8 \times 10^4 \text{ kg}$$

Si le gaz est initialement dans des conditions permettant la vie dans la station : $T = 300 \text{ K}$, $P = 1 \text{ bar}$, $\mu = P \mathcal{M}_{\text{air}} / (RT) = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$, donc le volume initial de gaz nécessaire vaut

$$\mathcal{V} = \frac{m}{\mu} = 2,4 \times 10^4 \text{ m}^3$$

En supposant les modules cylindriques de rayon $R = 10 \text{ m}$, la longueur nécessaire vaut $L = 76 \text{ m}$, tandis qu'en prenant $R = 20 \text{ m}$, $L = 19 \text{ m}$. Le volume nécessaire semble plus important que le volume des modules de service.

Q23. Si les conditions dans le scaphandre sont identiques à celles des modules de service, la vitesse d'éjection est de l'ordre de $v_e = 500 \text{ m s}^{-1}$, et les débits volumique et massique éjectés valent $D_v = Sv = 60 \text{ L s}^{-1}$ et $D_m = \mu Sv_e = 60 \text{ g s}^{-1}$: ces valeurs sont élevées et ne permettent pas de profiter de la poussée pendant une durée supérieure à une dizaine de secondes.

Le bilan de quantité de mouvement sur le gaz éjecté donne

$$\frac{dp}{dt} = D_m(v_e - 0) = \mu S v_e^2 = 30 \text{ N}$$

Cette quantité de mouvement est échangée avec les scaphandre : la poussée disponible est donc de 30 N .

En se plaçant dans le référentiel de la station supposé galiléen, en supposant la poussée $F = 30 \text{ N}$ constante, sur une durée $t = 10 \text{ s}$, pour un scaphandre de masse $M = 150 \text{ kg}$ et une vitesse initiale nulle, le déplacement possible vaut :

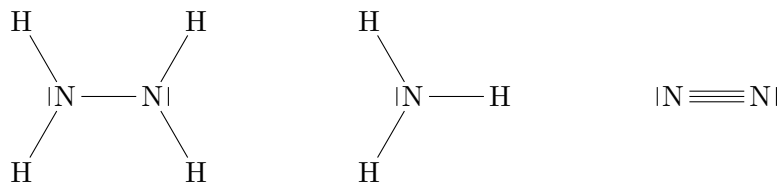
$$\ell = \frac{F}{2M} t^2 = 10 \text{ m}$$

Cette distance semble être en accord avec la figure 7, mais c'est une limite supérieure qui est très faible.

Sur la figure 7 la poussée n'est pas alignée avec le centre de masse probable du scaphandre, d'où la présence d'un moment non nul : Le scaphandre va acquérir un mouvement de rotation, qui risque de le rendre incontrôlable.

V Fabrication d'eau sur Mars

Q24.



Q25. La combinaison des 3 équations-bilans concernant l'hydrazine donne $5 \text{N}_2\text{H}_4 = 5 \text{N}_2 + 10 \text{H}_2$ soit $\text{N}_2\text{H}_4 = \text{N}_2 + 2 \text{H}_2$, et d'autre part la combustion de H_2 s'écrit $2 \text{H}_2 + \text{O}_2 = 2 \text{H}_2\text{O}$: globalement une mole d'hydrazine permet de former 2 moles d'eau.

On peut écrire pour l'eau et l'hydrazine (n désignant le nombre de moles, \mathcal{M} la masse molaire, ρ la masse volumique et V le volume)

$$V(\text{H}_2\text{O}) = \frac{n(\text{H}_2\text{O})\mathcal{M}(\text{H}_2\text{O})}{\rho(\text{H}_2\text{O})} ; V(\text{N}_2\text{H}_4) = \frac{n(\text{N}_2\text{H}_4)\mathcal{M}(\text{N}_2\text{H}_4)}{\rho(\text{N}_2\text{H}_4)}$$

comme le nombre de moles d'hydrazine nécessaire est égal à la moitié nombre de moles d'eau à former

$$\frac{V(\text{N}_2\text{H}_4)}{V(\text{H}_2\text{O})} = \frac{n(\text{N}_2\text{H}_4) \mathcal{M}(\text{N}_2\text{H}_4) \rho(\text{H}_2\text{O})}{n(\text{H}_2\text{O}) \mathcal{M}(\text{H}_2\text{O}) \rho(\text{H}_2\text{O})} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}(\text{N}_2\text{H}_4)}{\mathcal{M}(\text{H}_2\text{O})} \frac{1}{d(\text{N}_2\text{H}_4)}$$

où d désigne la densité. Avec $V(\text{H}_2\text{O}) = 600 \text{ L}$, $\mathcal{M}(\text{N}_2\text{H}_4) = 32 \text{ g mol}^{-1}$ et $\mathcal{M}(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g mol}^{-1}$

$$V(\text{N}_2\text{H}_4) = \frac{\mathcal{M}(\text{N}_2\text{H}_4)}{\mathcal{M}(\text{H}_2\text{O})} \frac{V(\text{H}_2\text{O})}{2d(\text{N}_2\text{H}_4)} = 523 \text{ L}$$

Q26. Un catalyseur ne modifie pas l'état d'équilibre thermodynamique, il n'influence que la cinétique de réaction

Q27. Le réseau cfc comporte 1 atome partagé entre 2 mailles au centre de chacune des 6 faces et 8 atomes partagés entre 8 mailles à chacun des sommets, soit $6/2 + 8/8 = 4$ atomes en propres : la masse d'une maille vaut $m = 4\mathcal{M}(\text{Ir})/\mathcal{N}_A$, pour un volume a^3 , soit une masse volumique

$$\rho = \frac{4\mathcal{M}(\text{Ir})}{\mathcal{N}_A a^3} = d\mu(\text{H}_2\text{O})$$

La tangence des atomes se fait selon les diagonales des faces de longueur $\sqrt{2}a$, donc le rayon atomique vérifie $4R = \sqrt{2}a$

Le rayon atomique vérifie donc, avec $\mathcal{M}(\text{Ir}) = 192,2 \text{ g mol}^{-1}$

$$R = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{4\mathcal{M}(\text{Ir})}{\mathcal{N}_A d\mu(\text{H}_2\text{O})} \right)^{1/3} = 135,8 \text{ pm}$$

Remarque : la masse atomique ne figure pas dans l'énoncé, est-ce un oubli ou est-ce volontaire (d'où la formulation « estimer ») : dans ce dernier cas il ne semble pas raisonnable d'attendre des candidats de connaître un ordre de grandeur meilleur que 10 g mol^{-1} to 100 g mol^{-1} .

Q28. On calcule successivement $\Delta_r H^\ominus = 566 \text{ kJ mol}^{-1}$, $\Delta_r S^\ominus = 205 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ puis dans l'approximation d'Ellingham à $T = 800 \text{ }^\circ\text{C} = 1073 \text{ K}$ $\Delta_r G^\ominus = \Delta_r H^\ominus - T\Delta_r S^\ominus = 346 \text{ kJ mol}^{-1}$ et enfin

$$K^\ominus = \exp\left(\frac{\Delta_r G^\ominus}{RT}\right) = 1,4 \times 10^{-17}$$

La réaction est très faiblement avancée à cette température.

Q29. La réaction est endothermique donc défavorisée thermodynamiquement par une baisse de température d'après la règle de van't Hoff.

Q30. Sans autre indication on peut supposer qu'il s'agit de calculer la température de flamme isobare lors de la combustion du dihydrogène.

L'équation-bilan s'écrit $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O}$, d'enthalpie standard $\Delta_r H^\ominus = -484 \text{ kJ mol}^{-1}$.

On suppose la réaction totale, avec un apport de réactifs en proportions stœchiométriques, sans composés inactifs. Le bilan de matière s'écrit

espèces	H ₂	O ₂	H ₂ O
initial	2n	n	0
final	0	0	n

L'avancement de la réaction est $\xi = n$. On décompose la transformation en une réaction isobare et isotherme pour laquelle $\Delta H_1 = n\Delta_r H^\ominus$, suivi d'une variation de température isobare des $2n$ moles d'eau produites pour lequel $\Delta H_2 = 2nc_P(\text{H}_2\text{O})\Delta T$. Si la transformation est supposée adiabatique et isobare, le premier principe s'écrit

$$0 = Q_p = \Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = n\Delta_r H^\ominus + 2nc_P(\text{H}_2\text{O})\Delta T$$

on en déduit la variation de température

$$\Delta T = \frac{-\Delta_r H^\ominus}{2c_P(\text{H}_2\text{O})} = 6,54 \times 10^3 \text{ K}$$

Pour une température initiale de l'ordre de 300 K la température maximale atteinte est de l'ordre de $6,9 \times 10^3 \text{ K}$. Cette valeur est critiquable : l'approximation d'Ellingham n'est valable que pour un intervalle limité de température (rappelé dans le programme officiel), on néglige les pertes thermiques,...

VI Peut-on cultiver des pommes de terre sur Mars ?

VI.A - Métabolisme de la bactérie

Q31. Tous les phénomènes de transport peuvent utiliser la notion de résistance :

— conduction électrique : $R = \frac{V_a - V_b}{I_{a \rightarrow b}}$

— conduction thermique : $R_{\text{th}} = \frac{T_a - T_b}{\phi_{\text{th}, a \rightarrow b}}$

— écoulement visqueux dans une canalisation $R_{\text{hyd}} = \frac{P_a - P_b}{D_{m, a \rightarrow b}}$

de manière générale la résistance est définie par le rapport de la variation entre entrée et sortie de la grandeur intensive à l'origine du phénomène de transport au flux de la grandeur caractérisant le transport.

Q32. La question suivante suggère un calcul sans approximation. La bactérie est supposée sphérique, donc dans un modèle unidimensionnel en coordonnées sphériques le flux dirigé vers l'extérieur à la distance r du centre s'écrit $\phi_{i \rightarrow e} = 4\pi r^2 j(r)$ où $j(r)$ désigne la densité de courant particulaire.

La conservation du flux en régime stationnaire sans source, combiné à la loi de Fick conduit à la relation

$$j(r) = \frac{\phi_{i \rightarrow e}}{4\pi r^2} = -D \frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{dr}$$

En intégrant cette relation entre la surface interne de la membrane ($[\text{H}_2\text{O}_2]_i$, $r = R - e$) et la surface externe ($[\text{H}_2\text{O}_2]_e$, $r = R$), on obtient la relation

$$\frac{\phi_{i \rightarrow e}}{4\pi} \left(\frac{1}{R - e} - \frac{1}{R} \right) = -D([\text{H}_2\text{O}_2]_e - [\text{H}_2\text{O}_2]_i) = D([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$$

qui conduit à l'expression de la résistance

$$R_p = \frac{([\text{H}_2\text{O}_2]_e - [\text{H}_2\text{O}_2]_i)}{\phi_{i \rightarrow e}} = \frac{1}{4\pi D} \left(\frac{1}{R - e} - \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{4\pi D} \frac{e}{R(R - e)}$$

Q33. Si $e \ll R$, l'expression précédente se simplifie en

$$R_p = \frac{1}{4\pi D} \frac{e}{R^2} = \frac{e}{DS}$$

où $S = 4\pi R^2$ est la surface de la bactérie : on retrouve le modèle plan.

Q34. $V_i = 3,2 \times 10^{-15} \text{ L} = \frac{4\pi R^3}{3}$ conduit à

$$R = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3} = 9,1 \times 10^2 \text{ nm} \gg e = 9 \text{ nm}$$

on utilise l'expression simplifiée, avec $D = 2,0 \times 10^{-13} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$R_p = \frac{e}{4\pi D R^2} = 4,3 \times 10^{15} \text{ s m}^{-3}$$

Q35. Le bilan de particules pour une bactérie s'écrit

$$\frac{d([\text{H}_2\text{O}_2]_i V)}{dt} = -\phi_{i \rightarrow e} = -\frac{[\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e}{R_p} ; \quad \frac{d([\text{H}_2\text{O}_2]_i)}{dt} = -\frac{[\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e}{V R_p}$$

Q36.

$$\frac{d([\text{H}_2\text{O}_2]_i V)}{dt} = -k_d ([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$$

où $k_d = 1/(R_p V) > 0$

Il faut choisir le signe $-$: ceci est cohérent avec la stabilité du phénomène de diffusion.

$$k_d = \frac{1}{R_p V} = \frac{3D}{Re} = 73 \text{ s}^{-1}$$

VI.B -

Q37. Le dénominateur de l'expression de la vitesse montre que K_M a la dimension d'une concentration (mol L^{-1}).

— Si $[S] \ll K_M$, $v \approx v_{\max}[S]/K_M$: la réaction est d'ordre 1 par rapport au composé détruit par l'enzyme

— Si $[S] \gg K_M$, $v \approx v_{\max}$: la réaction est d'ordre 0 par rapport au composé

On peut considérer que K_M est une concentration caractéristique au-dessus de laquelle la vitesse de réaction est indépendante de la concentration de substrat, égale à v_{\max} : l'enzyme est saturé par le composé qu'il décompose, alors qu'en-dessous de cette concentration la réaction est d'ordre 1 par rapport au substrat.

VI.C -

On utilise la relation charge totale = $\sum_i \text{n.o.}_i$, avec $\text{n.o.}(\text{H}) = +I$

composé	H_2O_2	H_2O	O_2
n.o.	$-I$	$-II$	0

Il s'agit d'une réaction d'oxydoréduction (le nombre d'oxydation de l'oxygène est modifié, qui est également une réaction de dismutation puisque le peroxyde se décompose en 2 espèces et joue simultanément le rôle d'oxydant et de réducteur.

Q38. On peut écrire les deux demi-réactions

— $\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^- = 2\text{H}_2\text{O}$: réduction de l'oxydant H_2O_2 , couple $\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$, $E^\ominus = 1,77\text{ V}$

— $\text{H}_2\text{O}_2 = 2\text{H}^+ + \text{O}_2 + 2\text{e}^-$: oxydation du réducteur H_2O_2 , couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}_2$, $E^\ominus = 0,69\text{ V}$

La réaction globale s'écrit (réduction)/2 + (oxydation)/2 et met en jeu un électron. Par conséquent

$$\Delta_r G^\ominus = -1\mathcal{F} (E^\ominus(\text{oxydant}) - E^\ominus(\text{réducteur}))$$

et

$$K^\ominus = \exp\left(\frac{\mathcal{F} (E^\ominus(\text{oxydant}) - E^\ominus(\text{réducteur}))}{RT}\right) = 10^{18}$$

La réaction de décomposition peut être supposée totale.

Q39. À l'intérieur de la bactérie, H_2O_2 apparaît du fait du métabolisme et disparaît du fait des réactions enzymatiques et de la diffusion vers le milieu extérieur à travers la paroi :

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = k_p - \frac{v_{\max}^{Ahp}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{[\text{H}_2\text{O}_2]_i + K_M^{Ahp}} - \frac{v_{\max}^{Cat}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{[\text{H}_2\text{O}_2]_i + K_M^{Cat}} - k_d([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$$

Dans le milieu extérieur, la variation de la quantité de H_2O_2 est uniquement liée à la diffusion à travers la paroi bactérienne. Pour une bactérie le flux sortant vaut

$$\phi_{i \rightarrow e} = \frac{([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)}{R_p} = V k_d([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$$

La densité volumique de bactéries vaut n , donc si on néglige le volume propre des bactéries

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_e}{dt} = n\phi_{i \rightarrow e} = nV k_d([\text{H}_2\text{O}_2]_i - [\text{H}_2\text{O}_2]_e)$$

Q40. En régime stationnaire le bilan sur le volume extérieur aux bactéries impose l'égalité des concentrations intérieures et extérieures : $[\text{H}_2\text{O}_2]_i = [\text{H}_2\text{O}_2]_e$, le terme diffusif s'annule et compte tenu des approximations données :

$$0 = \frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = k_p - \frac{v_{\max}^{Ahp}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{[\text{H}_2\text{O}_2]_i + K_M^{Ahp}} - \frac{v_{\max}^{Cat}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{[\text{H}_2\text{O}_2]_i + K_M^{Cat}} = k_p - \frac{v_{\max}^{Ahp}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{K_M^{Ahp}} - \frac{v_{\max}^{Cat}[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{K_M^{Cat}}$$

D'où

$$[\text{H}_2\text{O}_2]_i = k_p \left(\frac{v_{\max}^{Ahp}}{K_M^{Ahp}} - \frac{v_{\max}^{Cat}}{K_M^{Cat}} \right)^{-1} = 2,4 \times 10^{-8} \text{ mol L}^{-1} = 24 \text{ nmol L}^{-1}$$

L'approximation proposée par l'énoncé est vérifiée : $[\text{H}_2\text{O}_2]_i \ll K_M^{Ahp}, K_M^{Cat}$. Cette concentration est très faible : les enzymes contrôlent efficacement le niveau de H_2O_2 dans les bactéries.

VI.D - Situation de stress oxydant

Q41. En situation de stress oxydant, on peut négliger le terme diffusif, et supposer la concentration $[\text{H}_2\text{O}_2]_i$ très supérieure aux concentrations K_{Cat} et K_{Ahp} . L'équation différentielle vérifiée par $[\text{H}_2\text{O}_2]_i$ se simplifie en

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = k_p - (v_{\max}^{Ahp} + v_{\max}^{Cat})$$

et compte tenu des valeurs numériques

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = -v_{\max}^{Cat}$$

Q42. Pour une bactérie

$$\frac{dn(\text{H}_2\text{O}_2)}{dt} = V \frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]_i}{dt} = -V v_{\max}^{Cat} = 1,6 \times 10^{-15} \text{ mol s}^{-1}$$

Q43. On souhaite faire diminuer la concentration $[\text{H}_2\text{O}_2]$ de 1 mol L^{-1} à $0,5 \text{ mol L}^{-1}$: $\Delta[\text{H}_2\text{O}_2] = -0,5 \text{ mol L}^{-1}$, pour une densité de bactéries n . Comme la vitesse de dégradation est constante dans le domaine de concentration considéré

$$\Delta[\text{H}_2\text{O}_2] = -nV v_{\max}^{Cat} \Delta t$$

d'où

$$\Delta t = \frac{-\Delta[\text{H}_2\text{O}_2]}{nV v_{\max}^{Cat}} : \Delta t(n = 10^7 \text{ mL}^{-1}) = 3,13 \times 10^4 \text{ s} \approx 8,7 \text{ h} ; \Delta t(n = 10^9 \text{ mL}^{-1}) = 312 \text{ s} \approx 5 \text{ min}$$

La population de bactéries doit être dense pour résister efficacement au stress oxydatif.