

Centrale-Supélec 2021, filière PSI, épreuve de Physique-Chimie 2

Corrigé proposé par D. Sevrain et JPh Caniparoli ; contact (erreurs, ...) : artefact.act@wanadoo.fr

I Enjeux énergétiques

Q1.

- D'après le document 1, il y a environ 32,5 millions de voitures particulières en France, qui consomment

$$12,7 \times 10^6 \times 8935 \times 7,5/100 + 19,8 \times 10^6 \times 15910 \times 6,1/100 = 2,75 \times 10^{10} \text{ L/an}$$

soit 27,5 Mtep en assimilant 1 m^3 de carburant à 1 tep, puis en utilisant les données, un consommation de $1,16 \times 10^9 \text{ GJ/an}$.

- On peut aussi considérer la circulation des automobiles particulières, qui constitue 62% du trafic routier, qui représente lui-même 80% du transport, dont la consommation annuelle en 2016 est de 43,8 Mtep. Les automobiles particulières consomment donc 21,7 Mtep ou $0,912 \times 10^9 \text{ GJ/an}$, résultat cohérent avec le précédent.
- D'après le document 3, la consommation moyenne journalière d'un véhicule électrique peut être estimée à 300 W, soit pour une année $300 \times 3600 \times 24 \times 365 = 9,5 \text{ GJ/an}$. En reprenant l'estimation de 32,5 millions de véhicules (document 1), on obtient une consommation de $0,31 \times 10^9 \text{ GJ/an}$ environ 3 fois inférieure à celle des véhicules à moteurs thermiques (le rendement des moteurs électriques est meilleur que celui des moteurs thermiques, d'un facteur de l'ordre de 3)
- Le passage au tout électrique des véhicules particuliers représente un supplément de consommation annuelle de 85 TWh, ce qui représente d'après le document 2 16% de la production électrique annuelle en 2019 : il serait donc nécessaire de créer de nouvelles unités de production.

Q2.

- On se place dans le pire des cas (document 3) : scénario Forte, recharge simultanée des véhicules autour de 19 heures, puissance nécessaire 850 MW par million de véhicules, soit pour la totalité du parc de véhicules particuliers (32,5 millions, document 1) une puissance

$$850 \times 32,5 = 28 \times 10^3 \text{ MW} = 28 \text{ GW}$$

- En utilisant le document 5 : éoliennes terrestre actuelles, puissance 3 MW, diamètre du rotor 100 m, et le document 4 : distance entre éoliennes égale à 10 diamètres soit 1 km, d'où une surface occupée par éolienne de 1 km^2 , valeur peut-être sous-estimée dans la mesure où l'écart entre éoliennes dans la direction de leur axe est probablement largement supérieure à leur distance latérale.

- Le parc éolien nécessaire comprend $28 \times 10^3 / 3 = 9,4 \times 10^3$ éoliennes, soit une superficie de $9,3 \times 10^3 \text{ km}^2$, correspondant à $9,4 \times 10^3 / 550 \times 10^3 = 1,7\%$ de la surface de la France : ceci semble difficile à réaliser, d'autant plus que l'installation d'éoliennes nécessite des situations géographiques adaptées (vent moyen suffisant par exemple)
- Si on considère les futures éoliennes terrestres ou en mer, le résultat est légèrement inférieur (8000 éoliennes en mer)

II Conversion énergie éolienne en énergie mécanique – éolienne type Darrieus

Q3. En l'absence d'informations complémentaires, on ne peut que supposer que les résultats des 6 mois de mesures sont représentatifs de la situation sur une année (les caractéristiques du vent peuvent dépendre de la saison)

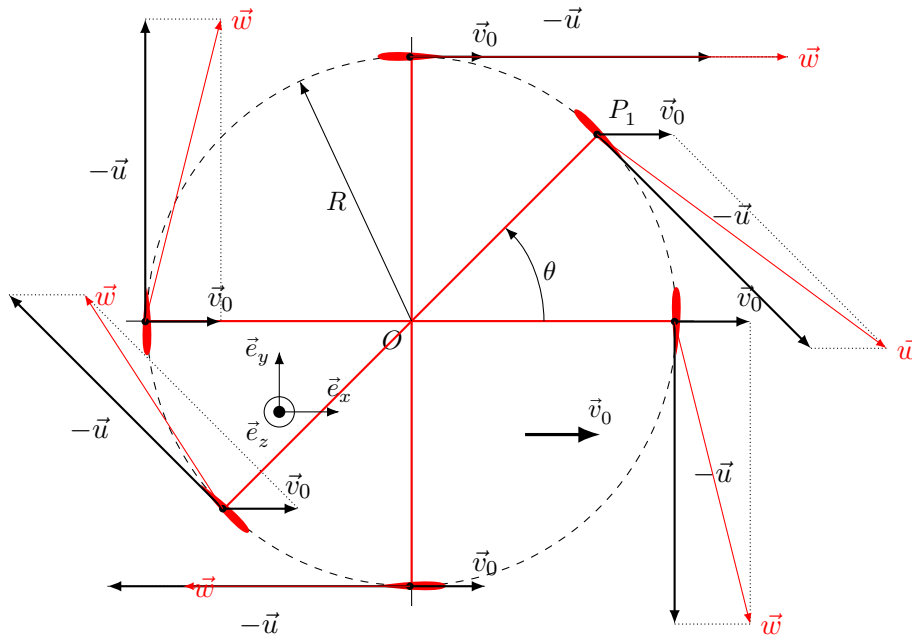
Dans cette hypothèse la puissance moyenne produite sur une année est la moyenne des puissances pour les différentes tranches de vitesses pondérées par les fractions du temps associées

$$\langle P \rangle = 0,37 \times 867 + 0,54 \times 5320 + 0,09 \times 10236 = 4,12 \text{ kW}$$

d'où l'énergie produite sur un an :

$$\mathcal{E} = \langle P \rangle \times \Delta t = 4,12 \times 10^3 \times 24 \times 365 = 36 \text{ MW h} = 1,3 \times 10^2 \text{ GJ}$$

Q4. Avec les données, $v_0 = (1 - a)v_\infty = 3,78 \text{ m s}^{-1}$, $\vec{u} = R\omega\vec{e}_\theta$, $\|\vec{u}\| = 14,4 \text{ m s}^{-1}$



Q5. De la relation $\vec{w} = \vec{v}_0 - \vec{u}$, on déduit

$$w^2 = v_0^2 + u^2 - 2\vec{v}_0 \cdot \vec{u} = v_0^2 + u^2 - 2uv_0 \cos(\theta + \pi/2) = v_0^2 + u^2 + 2uv_0 \sin \theta$$

D'après relations de l'énoncé : $v_0 = (1 - a)v_\infty$, $u = R\omega = \lambda v_\infty$, soit $u/v_0 = \lambda_0$, ce qui permet d'éliminer u dans la relation précédente

$$w^2 = v_0^2 (1 + \lambda_0^2 + 2\lambda_0 \sin \theta)$$

et de retrouver la relation donnée par l'énoncé :

$$w = v_0 \sqrt{1 + \lambda_0^2 + 2\lambda_0 \sin \theta}$$

Q6. D'après le schéma de la figure 4, $-\vec{w} = w \cos \alpha \vec{e}_\theta - \sin \alpha \vec{e}_r$, d'où

$$\tan \alpha = \frac{-\vec{w} \cdot \vec{e}_r}{\vec{w} \cdot \vec{e}_\theta}$$

On exprime $\vec{w} = \vec{v}_0 - \vec{u}$

$$\vec{w} = v_0 \vec{e}_x - u \vec{e}_\theta = v_0 (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) - u \vec{e}_\theta = v_0 \cos \theta \vec{e}_r - (v_0 \sin \theta + u) \vec{e}_\theta$$

On en déduit

$$\tan \alpha = \frac{v_0 \cos \theta}{v_0 \sin \theta + u} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta + u/v_0} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta + \lambda_0}$$

Q7. Les données de l'énoncé conduisent à $\lambda_0 = 3,8$: de manière qualitative \vec{w} reste proche de $-\vec{u}$ et $\tan \alpha$ se comporte comme $\cos \theta$:

- α est positif pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, s'annule pour $\theta = \pm\pi/2$ et passe par un maximum au voisinage de $\theta = 0$
- α est négatif pour $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$, et passe par un minimum au voisinage de $\theta = \pi$

Si on néglige l'influence de $\sin \theta$ au dénominateur, les extrema de l'angle α sont obtenus pour $\theta = 0, \pi$, soit $\tan \alpha \approx \pm 1/\lambda_0 = \pm 0,263$.

On peut alors se placer dans l'approximation des petits angles, et écrire de manière approchée

$$|\alpha| \leq \alpha_{\max} ; \alpha_{\max} \approx \tan(\alpha_{\max}) \approx 0,263 \text{ rad} = 15,1^\circ$$

l'approximation étant valable pour toutes les valeurs de θ , l'allure de α est donnée par la courbe représentative de $(\cos \theta)/\lambda_0$ (en bleu sur le graphique ci-dessous, sur laquelle la courbe exacte est tracée en rouge, ce qui montre la qualité de l'approximation effectuée).

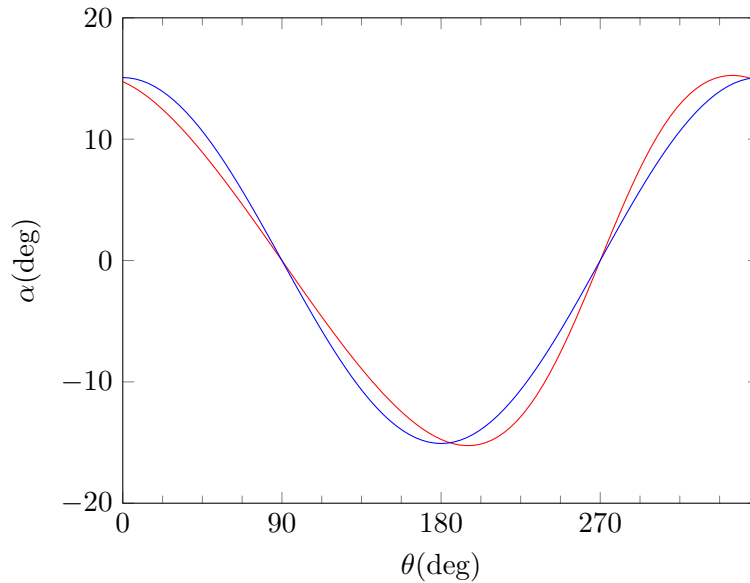
Pour un calcul plus précis, on part de l'expression exacte :

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\cos \theta}{\lambda_0 + \sin \theta} \right)$$

Comme la fonction arctan est monotone, ses extrema sont ceux de la fonction $\frac{\cos \theta}{\lambda_0 + \sin \theta}$, de dérivée

$$f'(\theta) = \frac{-\sin \theta (\lambda_0 + \sin \theta) - \cos^2 \theta}{(\lambda_0 + \sin \theta)^2} = -\frac{1 + \lambda_0 \sin \theta}{(\lambda_0 + \sin \theta)^2}$$

qui s'annule dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour $\theta = \pi + \arcsin(1/\lambda_0)$; $2\pi - \arcsin(1/\lambda_0)$ avec dans ce cas $|\alpha| \leq 15,2^\circ$, ce qui reste proche du calcul approché.



Q8. On reprend les données de l'énoncé pour estimer le nombre de Reynolds et choisir les courbes $C(\alpha)$.

— La vitesse relative du vent $w = v_0 \sqrt{1 + 2\lambda_0 \sin \theta + \lambda_0^2}$ varie entre $w(3\pi/2) = v_0(\lambda_0 - 1) = 10,6 \text{ m s}^{-1}$ et $w(\pi/2) = v_0(1 + \lambda_0) = 18,2 \text{ m s}^{-1}$

— La corde vaut $\ell = 0,45 \text{ m}$, $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$ et $\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$

On calcule à partir de l'expression $Re = \rho_{\text{air}} \ell w / \eta$:

$$3,2 \times 10^5 < Re < 5,5 \times 10^5$$

On choisit donc les courbes correspondant à $Re = 5 \times 10^5$:

— la courbe du coefficient de portance, dans le domaine d'angles d'incidences rencontrés pour l'éolienne ($|\alpha| < 15^\circ$) est approximativement linéaire (l'angle de décrochage n'est pas atteint), $C_L \approx k\alpha$ avec $k \approx 0,11$ (pour des angles exprimés en degrés) et $k \approx 6,3$ (si les angles sont exprimés en radians)

— sauf au voisinage de l'incidence nulle, où le coefficient de traînée est faible mais non nul alors que le coefficient de portance est nul, le coefficient de traînée est négligeable devant le coefficient de portance : $C_L(5^\circ) = 0,5$, $C_D(5^\circ) \approx 0,01$, $C_L(10^\circ) = 1$, $C_D(10^\circ) \approx 0,025$, $C_L(15^\circ) = 1,5$, $C_D(15^\circ) \approx 0,05$

Q9. Pour la pale 1, en négligeant la force de traînée comme indiqué dans l'énoncé

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_L + \vec{F}_D \approx \vec{F}_L = \frac{C_L \rho S w^2}{2} \vec{n} = \frac{C_L \rho S w^2}{2} (\cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_\theta)$$

— Le bras de levier de la composante radiale par rapport à l'axe de rotation Oz est nul, donc cette composante n'influence pas le mouvement de l'éolienne. Elle est compensée par les réactions d'axe

— Le bras de levier de la composante orthoradiale par rapport à l'axe de rotation Oz n'est pas nul (il vaut R), donc cette composante influence le mouvement de l'éolienne. Dans le domaine des petits angles, $\sin \alpha \approx \alpha$, donc $C_L \sin \alpha \propto \alpha^2$: cette composante est positive pour toutes les positions des pales, donc est à l'origine de la rotation de l'éolienne dans le sens direct.

Q10. Le bras de levier de la composante orthoradiale vaut R , d'où

$$\mathcal{M}_{1,z} = RF_{L,\theta} = \frac{1}{2}C_L\rho S w^2 \sin \alpha R$$

L'expression de w a été déterminée à la question 5, en la reportant on obtient

$$\mathcal{M}_{1,z} = \frac{1}{2}C_L \sin \alpha \rho S v_0^2 (1 + 2\lambda_0 \sin \theta + \lambda_0^2) R$$

En supposant l'approximation des petits angles, ce qui est une approximation grossière vers $15^\circ = 0,26 \text{ rad}$, on peut écrire (en exprimant α en radians)

$$\mathcal{M}_{1,z} = \frac{1}{2}k\alpha^2 \rho S v_0^2 (1 + 2\lambda_0 \sin \theta + \lambda_0^2) R$$

Puis en utilisant une nouvelle fois l'approximation des petits angles, et le résultat de la question 6 : $\alpha \approx \tan \alpha = \cos \theta / (\sin \theta + \lambda_0)$

$$\mathcal{M}_{1,z} = \frac{1}{2}k \rho S v_0^2 \frac{\cos^2 \theta}{(\sin \theta + \lambda_0)^2} (1 + 2\lambda_0 \sin \theta + \lambda_0^2) R = \kappa f(\theta)$$

où par identification

$$\kappa = \frac{1}{2}kR\rho S v_0^2 = \frac{1}{2}kR\ell L\rho v_0^2$$

k devant être exprimé en rad^{-1}

Remarque : pour la valeur maximale $\alpha \approx 15^\circ$, on trouve un écart de 10% entre l'approximation utilisée et le calcul numérique sans approximation.

Q11. Les positions des 3 pales sont θ (1), $\theta + 2\pi/3$ (2) et $\theta + 4\pi/3 = \theta - 2\pi/3$ (3). Comme elles sont identiques, elles partagent le même facteur κ , d'où

$$\Gamma_z = \kappa \left(f(\theta) + f\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + f\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \right) = \kappa \sum_{n=0}^2 f\left(\theta + \frac{2n\pi}{3}\right)$$

Q12. Les données de l'énoncé conduisent à $\lambda_0 = 3,8$, soit en moyenne angulaire $\langle F(\theta) \rangle \approx 1,58$. La valeur de k donnée correspond à la valeur estimée précédemment.

Les valeurs $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$, $\ell = 0,45 \text{ m}$, $L = 8 \text{ m}$, $R = 4 \text{ m}$ sont données, la vitesse angulaire se déduit de $\lambda = (R\omega)/v_\infty$, soit $R\omega = \lambda v_\infty = 14,4 \text{ m s}^{-1}$.

On calcule alors $\kappa\omega = 2800 \text{ W}$, puis

$$\langle \Gamma_z \rangle \omega = \kappa\omega \langle F(\theta) \rangle = 4,4 \text{ kW}$$

Cet ordre de grandeur est cohérent avec les résultats des essais (puissance moyenne de $5,5 \text{ kW}$ pour des vitesses de vent comprises entre 6 et 10 m s^{-1}).

Cette puissance est comparable avec la puissance d'un petit moteur industriel ou d'un appareil électroménager de type plaque à induction.

Q13. Le débit d'énergie cinétique traversant le cylindre éolien serait l'énergie cinétique du fluide qui traverse le cylindre éolien par unité de temps en l'absence d'éolienne. Cette définition conduit à un débit d'énergie nul, puisqu'en régime permanent la quantité d'énergie qui entre dans le cylindre ($\pi/2 < \theta < 3\pi/2$) est égale à la quantité d'énergie qui en ressort (le cylindre est une surface fermée, et en l'absence d'éolienne le champ de vitesse est uniforme).

Une définition plus appropriée serait le débit d'énergie traversant le maître-couple de l'éolienne : rectangle de hauteur L , de largeur le diamètre $2R$ de l'éolienne. Comme l'écoulement est uniforme, le débit massique vaut

$$D_m = \rho_{\text{air}} S v_\infty = \rho_{\text{air}} 2RLv_\infty$$

L'énergie cinétique massique vaut $e_c = v_\infty^2/2$, soit finalement

$$D_{E_c} = D_m e_c = \rho_{\text{air}} RLv_\infty^3 = 8,3 \text{ kW}$$

Q14. Le débit d'énergie associé à l'air intercepté par l'éolienne vaut D_{E_c} , alors que le débit d'énergie moyen récupéré par l'éolienne est la puissance \mathcal{P} . On peut donc définir le rendement énergétique de l'éolienne par

$$\eta = \frac{P}{D_{E_c}} = \frac{\kappa \langle F(\theta) \rangle \omega}{\rho_{\text{air}} RHv_\infty^3}$$

En utilisant l'expression de κ on obtient

$$\eta = \frac{\rho_{\text{air}} k\ell Lv_0^2 R\omega \langle F(\theta) \rangle}{\rho_{\text{air}} RHv_\infty^3} = \frac{k\ell v_0^2 \omega \langle F(\theta) \rangle}{v_\infty^3}$$

puis en exprimant $v_0 = (1-a)v_\infty$ et $R\omega = \lambda v_\infty$

$$\eta = \frac{k\ell}{2R} \lambda (1-a)^2 \langle F(\theta) \rangle = 0,53$$

C'est un rendement moyen, supérieur aux rendements usuels des machines thermiques ($\approx 0,3$) mais largement inférieur à celui des machines électriques ($\approx 0,9$)

Q15. La courbe de $F(\theta)$ fait apparaître une période angulaire $2\pi/3$, égale au tiers de la période de rotation de l'éolienne : la fréquence de la composante sinusoïdale du couple est donc le triple de la fréquence de rotation de l'éolienne :

$$f = 3 \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{2\pi} \frac{\lambda v_\infty}{R}$$

en utilisant la définition du facteur λ , supposé indépendant de la vitesse du vent. Avec $\lambda = 2,4$, $R = 4 \text{ m}$ et $0 < v_\infty < 16 \text{ m s}^{-1}$, on obtient

$$0 < f < 4,6 \text{ Hz}$$

Q16. On reprend l'expression de la force de traînée :

$$\vec{F}_D = \frac{C_D}{2} \rho_{\text{air}} S \omega^2 \vec{t}; \quad \vec{t} = -\cos \alpha \vec{e}_\theta + \sin \alpha \vec{e}_r$$

d'où le moment par rapport à l'axe Oz (seule la composante orthoradiale intervient) et la puissance de la traînée

$$\mathcal{M}_{D,z} = -\frac{C_D}{2} \rho_{\text{air}} S \omega^2 \cos \alpha R; \quad \mathcal{P}_D = -\frac{C_D}{2} \rho_{\text{air}} S \omega^2 \cos \alpha R \omega$$

Pour les valeurs de α calculées, $\cos \alpha > 0$, donc $\mathcal{P}_D < 0$ pour toutes les positions des pales. Si C_D augmente, la puissance dissipée également ce qui conduit à une diminution de la puissance que peut fournir l'éolienne.

III Générateur

III.A -

Q17.

— on identifie les plans de symétrie : $\Pi_s = (Oyz)$ et d'antisymétrie $\Pi_a = (Ozx)$ des courants, ce qui permet d'écrire dans l'entrefer dans lequel $\vec{B} = B(\theta)\vec{e}_r$

— pour deux points $M(\theta)$ et $M'(\theta' = -\theta)$ symétriques par rapport à Π_a , $\vec{B}(M') = \text{sym}(\vec{B}(M))$:

$$B(-\theta) = B(\theta)$$

— pour deux points $M(\theta)$ et $M'(\theta' = \pi - \theta)$ symétriques par rapport à Π_s , $\vec{B}(M') = -\text{sym}(\vec{B}(M))$:

$$B(\pi - \theta) = -B(\theta)$$

— les lignes de champ respectent les symétries : elles sont symétriques par rapport à Π_a et antisymétriques par rapport à Π_s . En particulier la ligne de champ traversant l'entrefer à l'angle θ , traverse également l'entrefer dans le sens opposé à l'angle $\pi - \theta$.

— on considère la ligne de champ orientée dans le sens direct traversant l'entrefer à l'angle $0 < \theta < \pi/2$. Le théorème d'Ampère appliqué à cette ligne de champ s'écrit, dans l'hypothèse de milieux ferromagnétiques idéaux ($H_{\text{ferro}} = 0$) :

$$I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\frac{D_i}{2}}^{\frac{D_i}{2}+e} H(\theta)\vec{e}_r \cdot dr\vec{e}_r + \int_{\frac{D_i}{2}+e}^{\frac{D_i}{2}} H(\pi-\theta)\vec{e}_r \cdot dr\vec{e}_r = H(\theta)e - H(\pi-\theta)e = 2H(\theta)e$$

— D'après la relation constitutive de l'air, $H_{\text{entrefer}} = B_{\text{entrefer}}/\mu_0$, soit finalement :

$$B(0 < \theta < \pi/2) = \frac{\mu_0 I}{2e}$$

— en utilisant une dernière fois les symétries, on obtient la forme du champ dans l'entrefer :

$$B\left(\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mu_0 I}{2e}\vec{e}_r \quad (\text{dirigé vers l'extérieur pour } I > 0)$$

$$B\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\mu_0 I}{2e}\vec{e}_r \quad (\text{dirigé vers l'intérieur pour } I > 0)$$

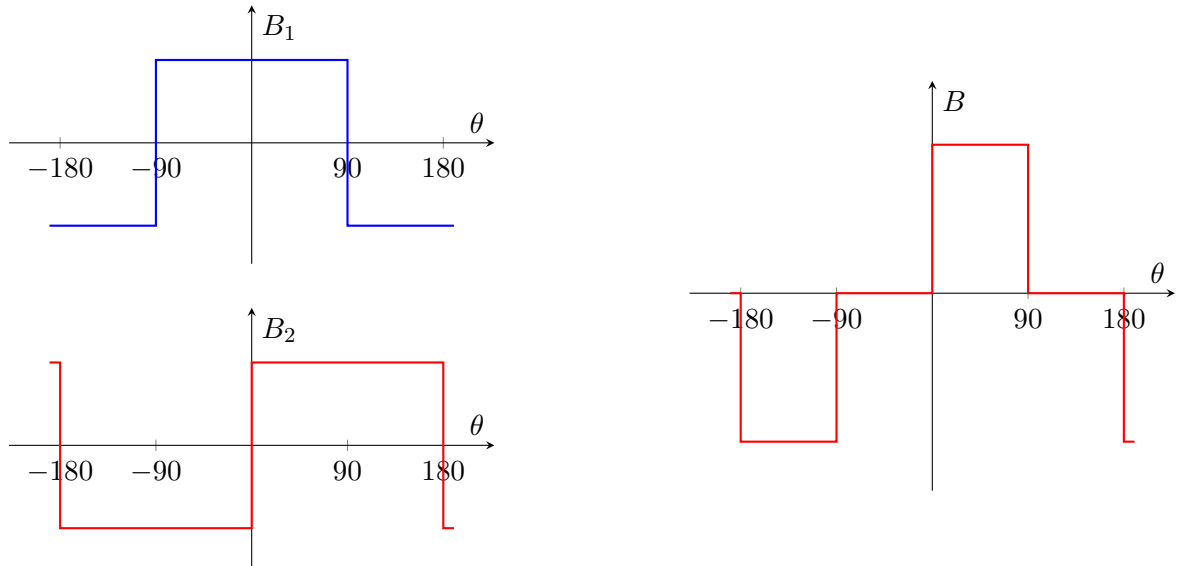
Q18.

— La seconde spire est obtenue par rotation de $\pi/2$ autour de Oz de la première spire, donc le champ $B_2(\theta')$ est identique au champ $B(\theta)$ si θ' est repéré par rapport à l'axe Oy : $\theta' = \theta - \pi/2$, la courbe de $B_2(\theta)$ se déduit de la courbe $B(\theta)$ par une translation de $\pi/2$

$$B_2(0 < \theta < \pi) = \frac{\mu_0 I}{2e} \quad ; \quad B_2(\pi < \theta < 2\pi) = -\frac{\mu_0 I}{2e}$$

— On trace les courbes $B_1(\theta)$ et $B_2(\theta)$ pour les deux spires 1 (axe x) et 2 (axe y)

— Puis la courbe représentative du champ total B par superposition des champs de chaque spire



Q19. Question déconnectée du reste. Si la puissance est constante, la tension et l'intensité traversant l'enroulement sont constantes (en particulier la fem induite doit être un signal triangulaire), d'où $P = UI$ et

$$I = \frac{P}{U} = 21,7 \text{ A}$$

En reportant cette valeur dans l'expression du champ maximal, on trouve

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 N I}{2e} = 0,143 \text{ T}$$

III.B -

Q20. Pour un même courant, le champ \vec{B}_{s2} se déduit de \vec{B}_{s1} par une rotation de $\pi/2$ dans le sens direct puisque $\vec{B}_{s2}(I, \theta) = \vec{B}_{s1}(I, \theta - \pi/2)$ Il suffit d'utiliser un enroulement semblable à celui créant \vec{B}_{s1} , tourné par rapport à ce dernier de $\pi/2$ autour de Oz dans le sens direct.

Q21. Le champ total s'écrit

$$\vec{B}_s = \vec{B}_{s1} + \vec{B}_{s2} = \frac{N\mu_0 I_s}{2e} (\cos(\theta) \cos(\omega_s t) + \sin(\theta) \cos(\omega_s t - \phi_2)) \vec{e}_r$$

Si on veut obtenir un champ glissant dans le sens direct, l'intensité traversant l'enroulement (2) décalé spatialement de $\pi/2$ par rapport à l'enroulement (1) dans le sens direct doit être en quadrature retard sur l'intensité traversant l'enroulement (1) : on choisit $\phi_2 = \pi/2$, ce qui conduit à l'expression

$$\begin{aligned} \vec{B}_s &= \frac{N\mu_0 I_s}{2e} \left(\cos(\theta) \cos(\omega_s t) + \sin(\theta) \cos\left(\omega_s t - \frac{\pi}{2}\right) \right) \vec{e}_r \\ \vec{B}_s &= \frac{N\mu_0 I_s}{2e} (\cos(\theta) \cos(\omega_s t) + \sin(\theta) \sin(\omega_s t)) \vec{e}_r = \frac{N\mu_0 I_s}{2e} \cos(\theta - \omega_s t) \vec{e}_r \end{aligned}$$

Par identification :

$$B_t = \frac{N\mu_0 I_s}{2e}$$

III.C -

Q22. On exprime la densité volumique d'énergie magnétique dans l'entrefer :

$$w_{\text{mag}} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \frac{(\vec{B}_s + \vec{B}_r)^2}{2\mu_0} = \frac{B_t^2 \cos^2(\theta - \phi_s) + B_r^2 \cos^2(\theta - \phi_r) + 2B_t B_r \cos(\theta - \phi_s) \cos(\theta - \phi_r)}{2\mu_0}$$

On linéarise cette expression avant de l'intégrer sur le volume de l'entrefer :

$$w_{\text{mag}} = \frac{B_t^2 (1 + \cos(2(\theta - \phi_s))) + B_r^2 (1 + \cos(2(\theta - \phi_r))) + 2B_t B_r (\cos(\phi_r - \phi_s) + \cos(2\theta - \phi_r - \phi_s))}{4\mu_0}$$

L'énergie magnétique s'obtient en intégrant la densité volumique d'énergie sur le volume de l'entrefer :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint w_{\text{mag}}(\theta) r dr d\theta dz$$

Comme w_{mag} ne dépend que de θ , les intégrales sur z et r sont directes :

$$\int_{z_0}^{z_0+L_r} dz \int_{\frac{D_i}{2}}^{\frac{D_i}{2}+e} r dr = L_r \frac{(D_i/2 + e)^2 - (D_i/2)^2}{2} = L_r \frac{D_i e + e^2}{2} \approx \frac{L_r D_i e}{2}$$

Il reste donc

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{L_r D_i e}{2} \int_0^{2\pi} w_{\text{mag}} d\theta$$

L'expression de w_{mag} fait apparaître deux types de termes :

- des constantes, qui sont simplement multipliées par 2π dans l'intégration
- des termes de la forme $\cos(2\theta + \phi)$ de période π . Ces termes sont intégrés sur deux périodes ce qui conduit à une intégrale nulle

On obtient finalement

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{L_r D_i e}{2} \frac{2\pi}{4\mu_0} (B_t^2 + B_r^2 + 2B_t B_r \cos(\phi_r - \phi_s)) = \frac{\pi L_r D_i e}{4\mu_0} (B_t^2 + B_r^2 + 2B_t B_r \cos(\phi_r - \phi_s))$$

et après avoir exprimé $B_t = \frac{\mu_0 N I_s}{2e}$

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{\pi L_r D_i e}{4\mu_0} \left(\left(\frac{\mu_0 N I_s}{2e} \right)^2 + B_r^2 + 2 \left(\frac{\mu_0 N I_s}{2e} \right) B_r \cos(\phi_r - \phi_s) \right)$$

Q23. Le couple exercé sur le rotor a pour expression

$$\Gamma = \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{d\phi_r} = -\frac{\pi L_r D_i e}{4\mu_0} 2 \left(\frac{\mu_0 N I_s}{2e} \right) B_r \sin(\phi_r - \phi_s)$$

soit après simplifications, et introduction de $\delta = \phi_r - \phi_s$

$$\Gamma = -\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\phi_r - \phi_s) = -\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\delta)$$

Pour $\delta > 0$, le rotor est en avance sur le champ statorique, donc la machine fonctionne en génératrice : le couple magnétique est opposé au mouvement car il y a conversion d'énergie mécanique (l'énergie associée au couple permettant de vaincre le couple magnétique et obtenir le mouvement du rotor) en énergie électrique.

Q24. Pour les valeurs données : $N = 21$, $D_i = 0,53$ m, $L_r = 0,3$ m, $I_s = 22$ A et $B_r = 1,2$ T, le couple maximal obtenu pour $\delta = \pi/2$ (rotor en quadrature avance) vaut 69 N m

III.D -

Q25.

- La justification qualitative serait la conversion idéale d'énergie : la puissance des forces électromotrices dans les bobines statoriques est exactement opposée à la puissance du couple magnétique calculée précédemment :

$$-\Gamma\omega_r = E_1 I_1 + E_2 I_2$$

mais sans calcul difficile d'aller plus loin

- La justification dimensionnelle des expressions des forces électromotrices utilise la relation précédente :

$$\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\delta) \omega_r = EI$$

soit à un facteur numérique près

$$E_i = \frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \omega_r$$

- La justification qualitative des dépendances en ϕ_r ne me semble pas évidente sans calcul. On peut cependant remarquer que l'enroulement (2) étant décalé de $\pi/2$ par rapport à l'enroulement (1) dans le sens de rotation, E_2 doit être en quadrature retard sur E_1 , ce qui est vérifié puisque $-\cos(\phi_r) = \sin(\phi_r - \pi/2)$
- On peut justifier la dépendance en ϕ_r est lié au flux du champ rotorique à travers les enroulements du stator. Lorsque $\phi_r = 0$, le plan Oyz est plan d'antisymétrie pour le champ magnétique, donc le champ rotorique est perpendiculaire au plan de la spire équivalente à l'enroulement (1), donc le flux est maximal : on peut écrire $\phi_1 = \phi_0 \cos(\phi_r)$. D'après la loi de Faraday

$$E_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = \phi_0 \omega_r \sin(\phi_r)$$

- En exprimant enfin la conversion électromécanique, avec $I_1 = I_s \cos(\phi_s)$ et $I_2 = I_s \sin(\phi_s)$ (expressions utilisées dans la partie précédente pour calculer le couple) et en notant ϕ_e le déphasage associé à la force électromotrice $E_1 = E_0 \sin(\phi_e)$:

$$\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\delta) \omega_r = E_1 I_s \cos(\phi_s) + E_2 I_s \sin(\phi_s)$$

$$\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\delta) \omega_r = E_0 I_s (\sin(\phi_e) \cos(\phi_s) + \sin(\phi_e - \pi/2) \sin(\phi_s)) = E_0 I_s \sin(\phi_e - \phi_s)$$

soit par identification, avec $\delta = \phi_r - \phi_s$

$$E_0 = \frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \omega_r ; \phi_e = \phi_s$$

Q26. La loi des mailles s'écrit en notation complexe :

$$\underline{E}_i = (R + R_u + jL\omega_s)\underline{I}$$

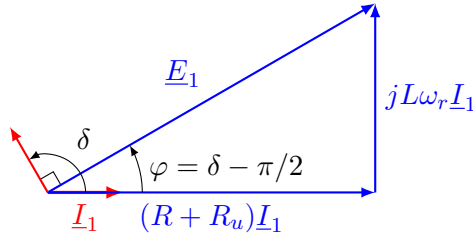
Les E_i s'écrivent en notation complexe

$$E_1 = E_0 \sin(\phi_r) \rightarrow \underline{E}_1 = E_0 e^{j(\phi_r - \pi/2)} ; E_2 = -E_0 \cos(\phi_r) \rightarrow \underline{E}_2 = -E_0 e^{j\phi_r}$$

d'où

$$\underline{I}_1 = \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4} \frac{e^{j(\phi_r - \pi/2)}}{R + R_u + jL\omega_r} ; \underline{I}_2 = -\frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4} \frac{e^{j\phi_r}}{R + R_u + jL\omega_r}$$

On peut représenter les grandeurs électriques de l'enroulement statorique 1 sur un schéma de Fresnel, en prenant l'intensité comme référence et en faisant figurer l'angle $\delta = \phi_r - \phi_s$, déduit des relations $\underline{I}_1 = I_s e^{j\phi_s}$ et $\underline{E}_1 = E_0 e^{j(\phi_r - \pi/2)}$



On peut séparer amplitude et phase dans les expressions précédentes :

$$\underline{I}_1 = \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}} e^{j(\phi_r - \pi/2 - \varphi)} ; \underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j\pi/2}$$

avec

$$\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega_r}{R + R_u}\right)$$

Cette valeur permet de calculer le décalage entre les positions des maxima des champs rotorique et statorique, qui dépend donc de la charge placée aux bornes des enroulements statoriques.

Q27. Les résultats précédents doivent s'identifier à $I_1 = I_s \cos(\phi_s)$ et $I_2 = I_s \sin(\phi_s)$. On en déduit

$$I_s = \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}} ; \phi_r - \frac{\pi}{2} - \varphi = \phi_s$$

soit

$$\delta = \frac{\pi}{2} + \varphi ; \varphi = \arctan\left(\frac{L\omega_r}{R + R_u}\right)$$

On en déduit l'expression du champ magnétique statorique (Q21) :

$$\vec{B}_t = \frac{N\mu_0 I_s}{2e} \cos(\theta - \phi_s) \vec{e}_r = \frac{N\mu_0}{2e} \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}} \cos(\theta - \phi_s) \vec{e}_r$$

Puis celle du couple (Q23)

$$\Gamma = -\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\delta) = -\left(\frac{\pi N D_i L_r B_r}{4}\right)^2 \omega_r \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi)}{\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}}$$

et en exprimant $\cos \varphi = (R + R_u) / \sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}$:

$$\Gamma = -\left(\frac{\pi N D_i L_r B_r}{4}\right)^2 \omega_r \frac{R + R_u}{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}$$

Q28. On suppose dans cette question, même si ce n'est pas clairement précisé, que la tension efficace est la tension aux bornes de la charge (en réalité la tension aux bornes d'une charge dépend de celle-ci, et les données concernent usuellement la tension à vide de l'alternateur qui est une constante pour un rotor à aimants permanents). L'énoncé ne précise pas non plus si la puissance donnée correspond aux deux charges identiques connectées aux phases, ou à chacune des charges prise séparément : on suppose qu'il s'agit de la puissance consommée par chacune des charges.

La relation $P = U^2/R_u$ permet de calculer $R_u = U^2/P = 10,6 \Omega$

La loi des mailles permet alors d'obtenir la valeur efficace des forces électromotrices :

$$U = R_u I_s ; E = \sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2} I_s : E_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}}{R_u} U = 286 \text{ V}$$

soit en amplitude $E = 404 \text{ V}$

Cependant cette valeur ne correspond pas au calcul découlant de la relation

$$E = \frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \omega_r = 988 \text{ V}$$

avec $N = 21$.

Si on conserve la valeur $E_{\text{eff}} = 286 \text{ V}$, plus probable,

$$|\Gamma| = \left(\frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \right)^2 \omega_r \frac{R + R_u}{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2} = \frac{2E_{\text{eff}}^2}{\omega_r} \frac{R + R_u}{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2} = 34,8 \text{ N m}$$

Q29. La période spatiale du champ rotorique vaut $2\pi/p$, donc chaque fois que le rotor tourne d'un angle $2\pi/p$, les bobines statoriques subissent la même interaction avec le rotor, ce qui correspond à une période des phénomènes électriques au stator. Par conséquent la pulsation ω_s vérifie $\omega_s = p\omega_r$ et pour une fréquence $f_s = 50 \text{ Hz}$:

$$\omega_r = \frac{\omega_s}{p} = \frac{2\pi f_s}{p} = 26 \text{ rad s}^{-1}$$

IV Aimants des rotors

IV.A - Extraction du néodyme

Q30. La masse de d'oxyde de néodyme contenue dans une tonne de minerai est comprise entre $0,6 \times 0,15 \times 1000 = 90 \text{ kg}$ et $0,7 \times 0,15 \times 1000 = 105 \text{ kg}$. La fraction massique de néodyme dans le minerai vaut

$$\frac{2\mathcal{M}(\text{Nd})}{2\mathcal{M}(\text{Nd}) + 3\mathcal{M}(\text{O})} = \frac{2 \times 144,2}{2 \times 144,2 + 3 \times 16} = 0,857$$

d'où la masse de néodyme par tonne de minerai

$$77 \text{ kg} < m < 90 \text{ kg}$$

IV.B - Corrosion des aimants

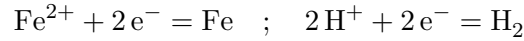
Q31.

Fe	Fe ²⁺	Fe ³⁺	Fe ₂ O ₃
0	II	III	III

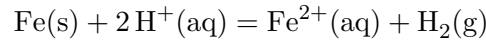
- corrosion : Fe^{2+} , Fe^{3+}
- passivation : Fe_2O_3
- immunité : Fe

Q32. En l'absence de dioxygène dissous et en milieu acide, l'oxydation du fer conduit à Fe^{2+} stable en présence d'eau :

- demi-réactions associées



- équation-bilan (2 électrons échangés)

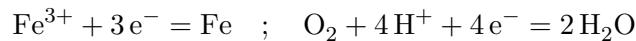


- constante d'équilibre

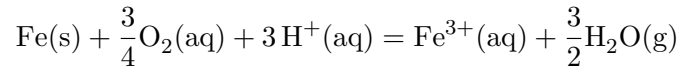
$$\log K^\ominus = \frac{2(E^\ominus(\text{H}^+/\text{H}_2) - E^\ominus(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}))}{0,06} = 14,7 \quad ; \quad K^\ominus = 10^{14,7} = 4,6 \times 10^{14}$$

En présence de dioxygène dissous et en milieu acide ($\text{pH} < 1,67$), l'oxydation du fer conduit à Fe^{3+} ($\text{pH} < 1,67$) ou Fe_2O_3 . En l'absence de données sur Fe_2O_3 , on se limite à la réaction conduisant à Fe^{3+} :

- demi-réactions associées



- équation-bilan (pour un coefficient stœchiométrique pour le fer égal à 1, soit 3 électrons échangés)



- Pas de donnée sur le couple Fe^{3+}/Fe : on peut soit calculer le potentiel associé à partir de l'égalité des potentiels d'équilibre (ce qui ne me semble pas dans l'esprit du programme actuel) :

$$E = E^\ominus(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}) + \frac{0,06}{3} \log[\text{Fe}^{3+}] = E^\ominus(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) =$$

$$E^\ominus(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) + \frac{0,06}{2} \log[\text{Fe}^{2+}]$$

ce qui conduit en éliminant les termes logarithmiques à la relation

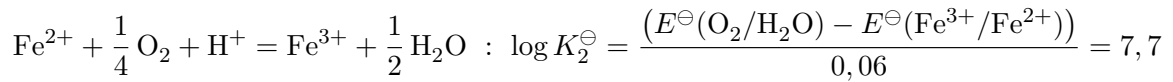
$$E^\ominus(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}) = \frac{E^\ominus(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) + 2E^\ominus(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe})}{3} = -0,037 \text{ V}$$

puis

$$\log K^\ominus = \frac{3(E^\ominus(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) - E^\ominus(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}))}{0,06} = 63,3 \quad ; \quad K^\ominus = 10^{63,3} = 2 \times 10^{63}$$

soit écrire la réaction comme superposition des deux réactions d'oxydation successives de Fe en Fe^{2+} puis de Fe^{2+} en Fe^{3+} et utiliser les relations entre K^\ominus , ce qui me semble bien plus dans l'esprit du programme

$$\text{Fe} + \frac{1}{2}\text{O}_2 + 2\text{H}^+ = \text{Fe}^{2+} + \text{H}_2\text{O} \quad ; \quad \log K_1^\ominus = \frac{2(E^\ominus(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) - E^\ominus(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}))}{0,06} = 55,7$$



d'où

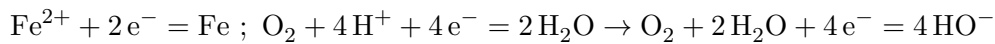
$$\log K^\ominus = \log K_1^\ominus + \log K_2^\ominus = \frac{3E^\ominus(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) - 2E^\ominus(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) - E^\ominus(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+})}{0,06} = 63,3$$

ce qui donne naturellement le même résultat

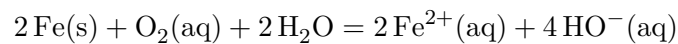
On en déduit que ces deux réactions sont quasi-totales : le fer s'oxyde facilement en présence d'eau.

Remarque : ne pas donner le potentiel du couple ($\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$) pour imposer son calcul me semble relever de la mesquinerie et de l'exercice de style : un calcul long et fastidieux, qui ne me semble pas dans l'esprit du programme, pour conclure à l'oxydation du fer par l'eau en présence ou non de dioxygène dissous.

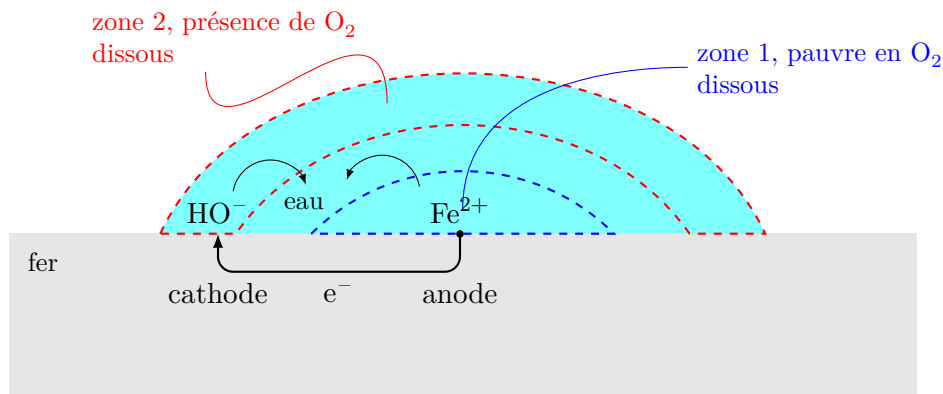
Q33. Les nouvelles demi-équations sont



soit l'équation-bilan



- La réduction du dioxygène se produit dans la zone où sa concentration est la plus forte (zone de potentiel le plus élevé, cathode), donc en périphérie de la goutte, en contact avec le fer pour permettre l'échange électronique ;
- l'oxydation du fer se produit dans la zone centrale de la goutte (potentiel le plus bas, puisque la concentration de dioxygène est la plus faible, anode).

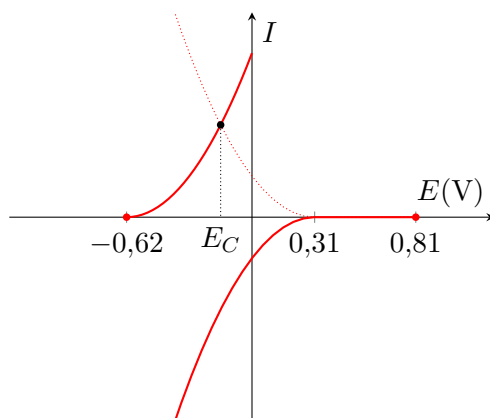


Q34. On calcule les potentiels à l'équilibre. Pour l'oxygène dissous, en l'absence de données thermodynamiques, on suppose que l'influence de son activité sur le potentiel est négligeable.

$$E(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = E^\ominus(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) + \frac{0,06}{4} \log (a(\text{O}_2)[\text{H}^+]^4) \approx 1,23 - 0,06\text{pH} = 0,81 \text{ V}$$

$$E(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = E^\ominus(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) + 0,03 \log[\text{Fe}^{2+}] = -0,62 \text{ V}$$

D'où le tracé des courbes intensité-potentiel, en tenant compte de la surtension.



Si les courbes sont symétriques (on peut toujours rêver, surtout lorsqu'un des couples présente une surtension importante et l'autre non), le potentiel de corrosion, égal au potentiel pour lequel les intensités anodique et cathodique sont exactement égales en valeur absolue, correspond à la moyenne des potentiels pour lesquels les courbes décollent de l'axe des abscisses, en tenant compte de la surtension à vide, dont la définition est totalement qualitative. Moyennant toutes ces hypothèses, dont le seul objectif est de faire une application numérique, on obtient :

$$E_c = \frac{(0,81 - 0,5) - 0,62}{2} = -0,155 \text{ V}$$

Remarque : plutôt que de faire toutes ces hypothèses qui n'ont aucun sens physique, il aurait mieux valu demander aux candidats de proposer un tracé qualitatif illustrant la détermination graphique de E_C (et de l'intensité de corrosion).

Q35. En milieu marin, l'eau est plus conductrice du fait des sels dissous, donc la résistance interne plus faible. Comme les pentes des courbes intensité-potential sont plus fortes, le courant de corrosion correspondant à E_c est plus fort, donc la corrosion plus rapide.

IV.C - Protection des aimants

Q36.

— La demi-réaction de réduction du nickel, $\text{Ni}^{2+} + 2\text{e}^- = \text{Ni}$, conduit au bilan $n(\text{e}^-) = 2n(\text{Ni})$ liant la quantité d'électrons échangés au nombre de moles de nickel formé. On en déduit la relation

$$I\Delta t = Q = n(\text{e}^-)\mathcal{F} = 2\mathcal{F}n(\text{Ni})$$

— La quantité de nickel formé est liée aux caractéristiques du dépôt par la relation

$$n(\text{Ni}) = \frac{m(\text{Ni})}{\mathcal{M}(\text{Ni})} = \frac{\rho(\text{Ni})\mathcal{V}_{\text{dépôt}}}{\mathcal{M}(\text{Ni})} = \frac{\rho(\text{Ni})S_r h}{\mathcal{M}(\text{Ni})}$$

— On en déduit la relation

$$I\Delta t = 2\frac{\rho(\text{Ni})S_r h}{\mathcal{M}(\text{Ni})}$$

soit

$$\Delta t = \frac{2\mathcal{F}\rho(\text{Ni})S_r h}{\mathcal{M}(\text{Ni})I} = 2,3 \times 10^4 \text{ s} = 6 \text{ h}20 \text{ min}$$

Q37. D'après la demi-réaction rédox (question précédente), le potentiel d'équilibre pour le nickel vaut pour $[\text{Ni}^{2+}] = C_0 = 1 \text{ mol L}^{-1}$

$$E_{\text{Nernst}} = E^\ominus(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}) + \frac{0,06}{2} \log C_0 = E^\ominus(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}) = -0,25 \text{ V}$$

On en déduit la surtension cathodique

$$\eta = E_C - E_{\text{Nernst}} = -0,25 \text{ V}$$

Ce qui permet de calculer la densité de courant pour la formation du nickel :

$$\log |j_{\text{Ni}}| = \frac{-0,25 + 0,30}{-0,15} = -0,33 \quad : \quad |j_{\text{Ni}}| = 0,464 \text{ A dm}^{-2}$$

puis l'intensité utile associée

$$I_u = S_r |j_{\text{Ni}}| = 2,92 \text{ A}$$

Tous les autres facteurs étant identiques, on peut relier les épaisseurs théorique et idéale du dépôt formé (proportionnelles d'après la question précédente à l'intensité) :

$$\frac{h_{\text{réel}}}{h_{\text{théorique}}} = \frac{I_u}{I} \quad : \quad h_{\text{réel}} = \frac{I_u}{I} h_{\text{théorique}} = 36,6 \text{ } \mu\text{m}$$

La réaction parasite est vraisemblablement la réduction de l'eau en dihydrogène. On calcule le potentiel d'équilibre dans les conditions de l'électrolyse ($pH = 4,5$, $p(\text{H}_2) = p^\ominus$) : $E_{\text{eq}} = E^\ominus(\text{H}^+/\text{H}_2) - 0,06pH = -0,27 \text{ V}$: si la surtension cathodique sur électrode de fer n'est pas trop importante cette réaction peut être cinétiquement comparable à celle de la réduction des ions Ni^{2+}

Q38. Le fer est plus réducteur que le nickel, donc ne serait plus protégé s'il se trouvait en contact avec l'eau à cause d'une fissure dans le revêtement de nickel (oxydation préférentielle du fer par rapport au nickel).

Au contraire un dépôt de zinc, plus réducteur que le fer, permettrait d'assurer la protection du fer même en présence d'une fissure de manière analogue au principe de l'anode sacrificielle (dans le cas du zingage, on compte cependant sur la passivation efficace par les produits d'oxydation du zinc tant que la couche de zinc n'est pas détériorée).