

PREMIERE PARTIE
CAPTEUR DE NIVEAU

A/ Champ électrostatique

A1. A partir de la loi de Poisson, avec $\rho=0$ entre les plaques, on obtient : $\Delta V = 0$ soit ici :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

A2. On utilise les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = e$, ce qui donne : $V(x) = \frac{V_2 - V_1}{e}x + V_1$.

$$A3. \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(x)) = -\frac{V_2 - V_1}{e}$$

Le champ est uniforme entre les plaques. Les lignes de champ sont des segments perpendiculaires aux plaques.

A4. En négligeant les effets de bord, il y a invariance suivant y et z et les plans

$(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie. On a donc : $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$.

En appliquant le théorème de Gauss sur un cylindre d'axe (Ox) , de surface de base S (pour simplifier l'application du théorème). L'une des deux surfaces planes du cylindre contenant le point M d'abscisse x , l'autre étant à une abscisse négative (champ nul sur cette surface,

extérieure au condensateur). On obtient : $E.S = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$.

A5. La capacité du condensateur vérifie $Q_1 = C(V_1 - V_2)$ donc $C = \frac{S\epsilon_0}{e}$

B/ Capacité du capteur

B1. Pour deux condensateurs en parallèle, la tension est commune donc $Q_1 = C_1(V_1 - V_2)$ et $Q_2 = C_2(V_1 - V_2)$. Le condensateur équivalent a donc une charge $Q_1 + Q_2$ donc $Q_{\text{eq}} = Q_1 + Q_2 = C_{\text{eq}}(V_1 - V_2) = C_1(V_1 - V_2) + C_2(V_1 - V_2)$ donc $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$

B2. Le condensateur complet est l'association en parallèle de deux condensateurs : l'un ayant la permittivité du vide, l'autre du gazole.

$$C(h) = \frac{h.L\epsilon_0}{e} + \frac{(H-h)L\epsilon_0\epsilon_r}{e} = \frac{L\epsilon_0(h + \epsilon_r(H-h))}{e}$$

B3. Les valeurs numériques (page 12) donnent effectivement $C(h) = 118 \times (1,00 + 4,00.h)$. Quand la cuve est vide, on a $h = 0$ donc $C_{\text{min}} = 118 \text{ pF}$ et pour le cas plein, on a $h = H$ donc $C_{\text{max}} = 118 \times 5 \text{ pF} = 590 \text{ pF}$

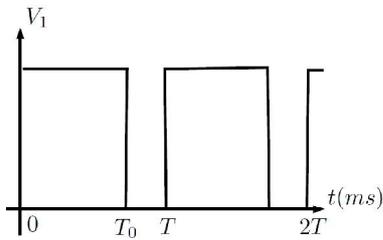
C/ Chaîne de mesure

C1. On impose $T_0 < T$ car il faut laisser le temps au système de passer du régime instable à l'état stable sans qu'une nouvelle impulsion vienne perturber le retour au régime stable (tension de sortie nulle)

C2. Le passage entre l'état instable et l'état stable possède un temps propre $T_0 = R.C(h) > 10\mu\text{s}$ entre les deux tensions $U_0 = 5 \text{ V}$ et 0 V , mais on a aussi $T_0 < 2\text{ms}$. Cela impose donc $R_{\text{min}} = 10\mu\text{s}/118\text{pF} = 84,7\text{k}\Omega$ et $R_{\text{max}} = 2\text{ms}/590\text{pF} = 3,39\text{M}\Omega$.

C3. On choisit $R = 2 \text{ M}\Omega$, ce qui impose que T_0 varie dans l'intervalle de $236\mu\text{s}$ à $1,18\text{ms}$

C4. On obtient un créneau dissymétrique de période T .



C5. La valeur moyenne de $v_2(t)$ est $V_{moy} = \frac{T_0}{T} U_0$. Elle est comprise entre 0, 59V et 2, 95V.

C6. On veut réaliser un moyenneur : Un filtre passe-bas de type RC (tension v_3 aux bornes du condensateur) convient.

Les fréquences présentes dans le signal (décomposition en série de Fourier) sont des multiples de $f=1/T$. Il suffit donc de vérifier que la fréquence la plus basse est éliminée : $f=1/T$.

Imposons $f_c < f/10$ soit $C_1 > \frac{10T}{2\pi R_1} = 14nF$

C7. Le pas de quantification q du CAN est $q = \frac{2}{2^8} = 19,5mV$

C8 $\Delta V = q = \frac{R\Delta C}{T} U_0$ d'où $\Delta h = \frac{qT}{RU_0 \cdot 118.4 \cdot 10^{-12}} = 8,3mm$

C9. $N = \frac{v_{moy}}{q}$ En reprenant les valeurs de la question C5, on trouve $N_{min} = 30$ et $N_{max} = 151$.

C10. La question n'est pas très claire. Supposons que l'on s'impose que l'amplitude de la fluctuation

de v_3 ne dépasse pas le pas q : $\frac{2U_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi R_1 C_1 / T)^2}} < q$ soit $C_1 > \frac{T \sqrt{\left(\frac{2U_0}{\pi q}\right)^2 - 1}}{2\pi R_1} = 236nF$

DEUXIEME PARTIE VIDANGE de la CITERNE

D/ Ecoulement parfait

D1. Les conditions pour appliquer la relation de Bernoulli (**généreusement donnée**) sont : Ecoulement parfait, stationnaire (ici, c'est plutôt quasi-stationnaire), incompressible et homogène. On peut ajouter qu'il ne faut pas qu'il y ait de dispositif actif, type pompe.

D2. Conservation de la masse donc du débit massique $D_m = cte$ soit

$$\rho V_A S_A = \rho V_B S_B \text{ soit } \boxed{V_A S_A = V_B S_B}$$

D3. Si $S_A \gg S_B$ on a $V_A \ll V_B$. On déduit de la relation de Bernoulli, les pressions en A et B étant égales à P_0 : $\boxed{V_B = \sqrt{2gh}}$

D4 $V_B = V_A \frac{S_A}{S_B}$ or $V_A = -\frac{dh}{dt} \Rightarrow \sqrt{2gh} = -\frac{dh}{dt} \frac{S_A}{S_B}$. En séparant les variables et en intégrant entre 0

et T , on obtient : $\boxed{T = \frac{S_A}{S_B} \sqrt{\frac{2H}{g}}}$ soit avec les valeurs de la page 12 : $\boxed{T = 451s = 7 \text{ min } 31s}$

E/ Prise en compte d'une perte de charge singulière

E1. En négligeant toujours V_A , on obtient : $\boxed{V_B = \sqrt{\frac{2gh}{1+K_C}}}$

E2. Méthode identique à D4 : $T' = \sqrt{1 + K_C} \cdot T = 561s = 9 \text{ min } 21s$ Le temps de vidange augmente à cause de la viscosité du fluide, c'est normal.

F/ Prise en compte d'une perte de charge régulière

F1. Bilan de quantité de mouvement pour le {cylindre}. On est en régime stationnaire, donc $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} = \sum \vec{F}_{ext}$. Les forces sont rappelées dans l'énoncé : forces pressantes en C_1 et C_2 (les forces pressantes latérales s'annulent par symétrie), le poids et les forces visqueuses, soit en projection sur (Oz): $0 = p_{C1}\pi r^2 - p_{C2}\pi r^2 - \rho g(z_2 - z_1)\pi r^2 + \eta \frac{dV}{dr} 2\pi r l$, d'où la relation de

l'énoncé avec : $\alpha = \frac{1}{2\eta l}$.

Supposons $V(r) > 0$, il faut alors $\tilde{p}_{C1} > \tilde{p}_{C2}$. $\alpha > 0$, la vitesse décroît avec r , elle est maximale au centre ($r = 0$) et nulle en $r = a$, par adhérence aux parois. Le signe de α est donc cohérent.

F2. Le terme $\alpha(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2})$ ne dépend pas de r . En intégrant l'équation de la question précédente et en utilisant la condition liée à l'adhérence du fluide visqueux $V(a) = 0$, on

obtient : $V(r) = \frac{\alpha(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2})a^2}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$ soit $V_{max} = \frac{\alpha(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2})a^2}{2}$.

F3. $Q_V = \int V(r) \cdot dS = \int_0^a V(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi a^2}{2} V_{max}$ soit $Q_V = \frac{\pi \alpha (\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2}) a^4}{4}$

F4. Par définition $Q_V = \pi a^2 V_{moy}$ d'où $V_{moy} = \frac{V_{max}}{2} = \frac{\alpha(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2})a^2}{4}$

F5. En utilisant la question précédente pour exprimer la perte de charge, on a :

$\Delta p_r = \frac{4V_{moy}}{\alpha a^2} = \frac{8\eta l V_{moy}}{a^2} = \lambda \frac{1}{2} \rho V_{moy}^2 \frac{l}{2a}$ d'après l'énoncé soit $\lambda = \frac{16\eta}{a \rho V_{moy}}$.

F6. $R_e = \frac{\rho V_{moy} d}{\eta}$ d'où $\lambda = \frac{32}{R_e}$.

F7. $R_e = 27 \cdot 10^3$.

F8. $R_e > 2 \cdot 10^3$, l'écoulement est donc turbulent et non laminaire, l'hypothèse est non valide, les calculs précédents non plus !

G/Remplissage du réservoir d'une voiture

G1.

$K_{total} = K_C(\text{voir partie E}) + 2K_{Coude brusque} + K_{pompe} + K_{code arrondi} = 0,55 + 2 \cdot 3/2 + 6 + 0,091 = 9,7$

G2. $\Delta p_{s,tot} = K \frac{1}{2} \rho V^2 = 83 \cdot 10^3 Pa = 0,83 bar$

G3. Si on calcule λ à partir de la question F7, on trouve plutôt $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-3}$! En prenant celui de la question G3, on trouve $\Delta p_{r,tot} = \lambda \frac{1}{2} \rho V_{moy}^2 \frac{l}{2a} = 58 \cdot 10^3 Pa = 0,58 bar$

G4. La section $S_B = \pi a^2$ est la même dans tout le circuit, la vitesse moyenne également (fluide incompressible). Le débit est donc : $Q_V = V_{moy} \cdot S_B = 4,5 \cdot 10^{-3} m^3 / s$

G5. En reprenant la formule de l'énoncé, on a :

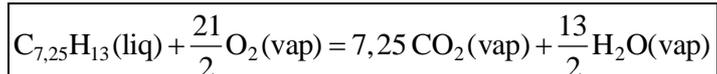
$$P_e = \frac{P_u}{r} = Q_V \left(\frac{1}{2} \rho (V_E^2 - 0^2) + \rho g (z_E - z_A) + 0 + \Delta p_{r,tot} + \Delta p_{s,tot} \right) = \boxed{860W}$$

Ce qui paraît être un ordre de grandeur cohérent.

**TROISIEME PARTIE
AUTOUR DE LA CHIMIE DES CARBURANTS**

H/ Etude de la combustion complète du gazole

H1. D'après le Document 1, le gazole est assimilé à un composé de formule chimique $C_{7,25}H_{13}$, d'où l'équation :



Rq : l'état physique de l'eau est déduit du Document 1 (ligne 37 « eau à l'état de vapeur ») et des données thermodynamiques fournies, qui seront nécessaires pour le calcul de $\Delta_r H^\circ$ à la question H4.

Vérifions grâce à un tableau d'avancement les masses de réactifs et de produits données dans le Document 1.

mol	$C_{7,25}H_{13}(liq)$	$+\frac{21}{2}O_2(vap)$	$= 7,25 CO_2(vap)$	$+\frac{13}{2}H_2O(vap)$	n_{N_2}
t = 0	n_0	n_{O_2}	0	0	n_{N_2}
t	$n_0 - \xi$	$n_{O_2} - \frac{21}{2} \cdot \xi$	$7,25 \cdot \xi$	$\frac{13}{2} \cdot \xi$	n_{N_2}

Pour réaliser la combustion totale de 1 kg de carburant, soit $n_0 = \frac{m}{M_{C_{7,25}H_{13}}} = 10$ mol de gazole,

la quantité de O_2 nécessaire est $n_{O_2} = \frac{21}{2} n_0 = 105$ mol. La quantité de N_2 associée vaut

$$n_{N_2} = 3,7 \cdot n_{O_2} = 388,5 \text{ mol.}$$

La réaction produit : $n_{CO_2} = 7,25 \cdot n_0 = 72,5$ mol de CO_2 et $n_{H_2O} = \frac{13}{2} n_0 = 65$ mol de H_2O .

On calcule les masses suivantes de réactifs et produits :

$$m_{O_2} = 3,4 \text{ kg} ; m_{N_2} = 10,9 \text{ kg (donc 14,3 kg d'air)} ; m_{CO_2} = 3,2 \text{ kg} ; m_{H_2O} = 1,2 \text{ kg.}$$

Ces valeurs sont en accord avec le texte.

H2. D'après le Document 2, la voiture consomme $4,5 \cdot 10^{-2}$ L de gazole par km, soit une masse de gazole $m = \rho_{\text{gazole}} V = 3,78 \cdot 10^{-2}$ kg de gazole par km (la masse volumique est fournie dans le Document 1 ligne 25). D'après la question **H1**, la combustion du gazole entraîne donc la formation de $m_{CO_2} = 121 \text{ g/km}$. C'est cohérent.

H3. Le comburant O_2 est réduit (le NO de O passe de 0 dans O_2 à -II dans CO_2 et H_2O), le gazole est donc oxydé.

H4. D'après la loi de Hess :

$$\Delta_r H^\circ = 7,25 \Delta_f H^\circ(CO_2(vap)) + \frac{13}{2} \Delta_f H^\circ(H_2O(vap)) - \Delta_f H^\circ(C_{7,25}H_{13}(liq)) - \frac{21}{2} \Delta_f H^\circ(O_2(vap))$$

AN : $\Delta_r H^\circ = -4,18 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ (réaction exothermique).

L'énergie libérée lors de la combustion (à P et T constantes) d'1 kg de gazole vaut :

$$Q_p = \Delta H = \int_0^\xi \Delta_r H \cdot d\xi \approx \int_0^\xi \Delta_r H^\circ \cdot d\xi = \xi \times \Delta_r H^\circ = n_0 \times \Delta_r H^\circ$$

AN : $\Delta H = -41,8 \cdot 10^3 \text{ kJ} \approx -42 \text{ MJ}$. La combustion d'1 litre de gazole libère

$$\Delta H = -41,8 \cdot 10^3 \times 0,840 \approx -35 \text{ MJ}.$$

C'est cohérent.

H5. Pour l'équation de combustion on calcule $\Delta_r H^\circ = -4,18 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$;

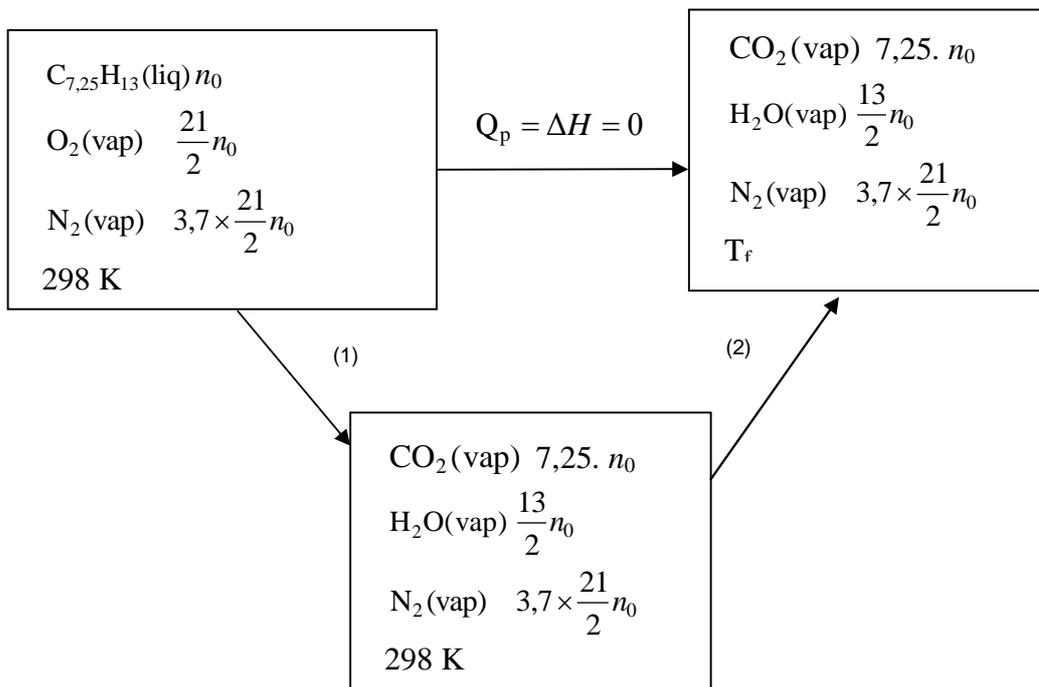
$$\Delta_r S^\circ = 7,25 S_m^\circ(\text{CO}_2(\text{vap})) + \frac{13}{2} S_m^\circ(\text{H}_2\text{O}(\text{vap})) - S_m^\circ(\text{C}_{7,25}\text{H}_{13}(\text{liq})) - \frac{21}{2} S_m^\circ(\text{O}_2(\text{vap}))$$

AN : $\Delta_r S^\circ = 298,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ (>0 car création de gaz, augmentation du désordre moléculaire).

A 298 K : $\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$. AN : $\Delta_r G^\circ(298 \text{ K}) = -42,7 \cdot 10^6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \ll 0$

et $K^\circ(T) = e^{-\frac{\Delta_r G^\circ(T)}{RT}}$ d'où : $K^\circ(298 \text{ K}) = e^{1,7 \cdot 10^6} \gg 1$. La transformation est totale.

H6. Température maximale atteinte par le système en évolution adiabatique et isobare.



(1) Transformation à T constante : $\Delta H_1 = n_0 \times \Delta_r H^\circ$

(2) Elevation de T à composition constante :

$$\Delta H_2 = \sum_i n_i \int C_{p,m,i}^\circ \cdot dT$$

$$\Delta H_2 = (7,25 \cdot n_0 C_{p,m}^\circ(\text{CO}_2(\text{vap})) + \frac{13}{2} n_0 C_{p,m}^\circ(\text{H}_2\text{O}(\text{vap})) + 3,7 \times \frac{21}{2} n_0 C_{p,m}^\circ(\text{O}_2(\text{vap}))) (T_f - T_0)$$

$$\Delta H_1 + \Delta H_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$T_f = T_0 - \frac{\Delta_r H^\circ}{(7,25 \cdot C_{p,m}^\circ(\text{CO}_2(\text{vap})) + \frac{13}{2} C_{p,m}^\circ(\text{H}_2\text{O}(\text{vap})) + 3,7 \times \frac{21}{2} C_{p,m}^\circ(\text{O}_2(\text{vap})))}$$

$$T_f = 25500 \text{ K} !$$

H7.* Proportions initiales des réactifs différentes de la stoechiométrie « parfaite » (voir Document 1)

* Pertes de chaleur (hypothèse sur l'adiabaticité du système non vérifiée)

* Décomposition des produits de combustion à haute T (dissociation thermique), souvent endothermique.

I/ Etude de quelques polluants azotés

I1. Si le mélange introduit est « pauvre », c'est-à-dire présente un excès d'air par rapport au carburant, N_2 et O_2 réagissent à T et P élevées pour donner des oxydes d'azote (NO , NO_2).

I2. Si la réaction admet des ordres partiels initiaux α et β par rapport à NO_2 et CO :

$$v_0 = k[NO_2]_0^\alpha [CO]_0^\beta.$$

La T est maintenue constante dans les 3 expériences (même si ce n'est pas précisé dans l'énoncé) donc k reste la même.

Dans les expériences 1 et 2, on a conservé la même valeur de $[NO_2]_0$ d'où :

$$\frac{v_{0,1}}{v_{0,2}} = \left(\frac{[CO]_{0,1}}{[CO]_{0,2}} \right)^\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{\ln \frac{v_{0,1}}{v_{0,2}}}{\ln \frac{[CO]_{0,1}}{[CO]_{0,2}}} \text{ soit } \beta = 2$$

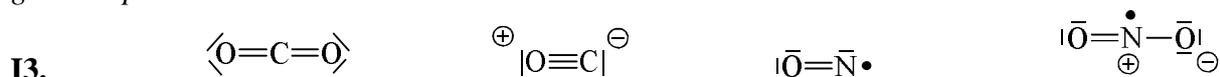
Dans les expériences 1 et 3, on a conservé la même valeur de $[CO]_0$. On voit que la valeur de v_0 est inchangée lorsqu'on modifie la concentration initiale en NO_2 d'où : $\alpha = 0$.

$$\left(\text{ou } \frac{v_{0,1}}{v_{0,3}} = \left(\frac{[NO_2]_{0,1}}{[NO_2]_{0,3}} \right)^\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ln \frac{v_{0,1}}{v_{0,3}}}{\ln \frac{[NO_2]_{0,1}}{[NO_2]_{0,3}}} \text{ soit } \alpha = 0 \right)$$

On a donc : $v_0 = k[CO]_0^2$.

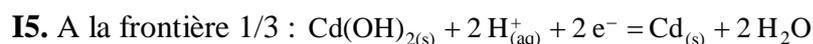
On calcule $k = \frac{v_0}{[CO]_0^2} = 0,5 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

Rq : ces expériences nous permettent seulement de déterminer les ordres initiaux. Cela ne garantit pas l'existence d'un ordre courant.



D'après la relation de Nernst, $E_{NO_3^-/NO_2^-} = E^\circ_{NO_3^-/NO_2^-} + \frac{0,06}{2} \cdot \log \frac{[NO_3^-] \cdot [H^+]^2}{[NO_2^-] \cdot (c^\circ)^2}$.

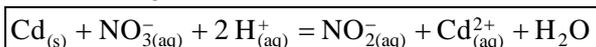
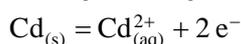
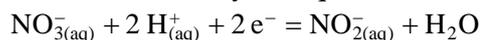
A la frontière : $[NO_3^-] = [NO_2^-]$ d'où $E_{NO_3^-/NO_2^-} = E^\circ_{NO_3^-/NO_2^-} - 0,06 \text{ pH} = 0,94 - 0,06 \text{ pH (en V)}$



$$E_{Cd(OH)_2/Cd} = E^\circ_{Cd(OH)_2/Cd} + \frac{0,06}{2} \cdot \log \frac{[H^+]^2}{(c^\circ)^2} = E^\circ_{Cd(OH)_2/Cd} - 0,06 \text{ pH}$$

La pente est égale à $-0,06 \text{ V}$.

I6. On superpose la frontière relative au couple $NO_3^-(aq) / NO_2^-(aq)$ au diagramme E-pH du cadmium. Les domaines de stabilité de Cd et NO_3^- sont disjoints, ils réagissent donc selon une réaction thermodynamiquement favorisée.



I7. On se place à la longueur d'onde du maximum d'absorbance de P_0 (de couleur rose donc absorbant dans le vert), issu de la réaction entre les ions nitrite et le réactif R_0 . Les mesures d'absorbance seront ainsi plus précises.

I8. D'après la loi de Beer-Lambert : $A = \epsilon_\lambda \cdot l \cdot [P_0]$.

Or la réaction entre les ions nitrite et R_0 étant totale, $[P_0] = [NO_2^-]_0$ et d'après l'équation de la réaction entre le cadmium et les ions nitrate, $[P_0] = [NO_3^-]_0$.

$$\text{D'où } A = \varepsilon_\lambda \cdot l \cdot [NO_3^-] = \varepsilon_\lambda \cdot l \cdot \frac{c_{m,NO_3^-}}{M_{NO_3^-}}$$

Une régression linéaire à la calculatrice de $A = f(c_{m,NO_3^-})$ montre des points parfaitement alignés selon une droite d'équation : $A = 0,637 \times c_{m,NO_3^-}$ ($R^2 = 1$). L'absorbance est proportionnelle à la concentration massique, donc la loi de Beer-Lambert est vérifiée.

I9. Pour la solution S_0 , $A = 0,231$ donc en utilisant la relation précédente :

$$c_{m,NO_3^-} = 0,36 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}.$$

I10. D'après l'équation de la réaction entre N_2O_5 et l'eau :

$$n_{N_2O_5,0} = \frac{n_{NO_3^-}}{2} = \frac{c_{m,NO_3^-} \cdot V}{2M_{NO_3^-}} \text{ donc : } c_{m,N_2O_5,0} = \frac{n_{N_2O_5,0} \times M_{N_2O_5}}{V} = \frac{c_{m,NO_3^-} \cdot M_{N_2O_5}}{2M_{NO_3^-}}$$

$$c_{m,N_2O_5,0} = 0,31 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} = 314 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-3}.$$