

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE-CHIMIE
e3a PSI 2021

Vous pouvez envoyer vos remarques à Fabien PAUCHET (fabien-christia.pauchet@ac-lille.fr) et Gaudeline WAGNER (gaudeline.wagner@ac-lille.fr)

Problème 1 - Étude d'un haut-parleur électrodynamique

A Étude générale

Q1. On oriente le circuit dans le sens du courant indiqué sur la figure 2 de l'énoncé. On suppose que le champ \vec{B} est uniforme et s'écrit $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

Le flux de \vec{B} à travers le circuit orienté est alors :

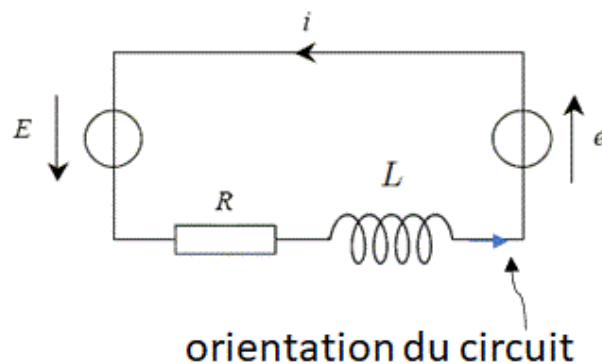
$$\Phi_B = \iint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bl(\ell_0 + x)$$

La loi de Faraday s'écrit : $e = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ donc la force électromotrice induite dans le cadre est :

$$e = -Bl \frac{dx(t)}{dt} = -Blv(t)$$

ce qui est bien l'expression demandée.

Q2. Il semble plus pertinent de réaliser d'abord le schéma électrique équivalent avant de donner la loi des mailles :



On obtient alors

$$E + e = Ri + L \frac{di}{dt}$$

(E.E.)

Q3. Système : {barre + haut-parleur}

Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Bilan des forces :

— le poids est négligé d'après l'énoncé, on va donc également négliger la réaction des rails ;

— force de frottement fluide : $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$;

— force de rappel : $\vec{F}_{el} = -k(\ell_{ressort} - \ell_0) = -kx\vec{u}_x$;

— force de Laplace \vec{F}_L qu'on exprime ci-dessous :

$$\vec{F}_L = \int_{\text{barre}} i \vec{d\ell} \wedge \vec{B} = \int_{y=0}^{\ell} i B dy \vec{u}_x \Rightarrow \vec{F}_L = iBl\vec{u}_x$$

Principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m_T \vec{a}$

qui donne, en projection selon \vec{u}_x :

$$\boxed{m_T \ddot{x} = -\alpha \dot{x} - kx + iBl} \quad (\text{E.M.})$$

Q4. Multiplions E.E. par i :

$$Ei + ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Multiplions E.M. par \dot{x} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_T \dot{x}^2 \right) = -\alpha \dot{x}^2 - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) + iBl\dot{x}$$

En remarquant que $ei = -Blvi = -Bl\dot{x}i$, on peut combiner les équations précédentes pour obtenir :

$$\boxed{Ei = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} + \mathcal{P}_{\text{frottements}}}$$

avec

— $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = Ri^2$, la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance ;

— $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2$, l'énergie magnétique stockée dans la bobine ;

— $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_T \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$, l'énergie mécanique de la barre ;

— $\mathcal{P}_{\text{frottements}} = \alpha \dot{x}^2$, la puissance perdue par frottement fluide.

On remarque ainsi que la puissance fournie par le générateur est en partie dissipée (par effet Joule et frottements), en partie stockée dans la bobine et en partie utilisée pour mettre la barre en mouvement.

Q5. On a déjà utilisé le résultat demandé à la question précédente ! En effet, on avait vu que

$$\boxed{\mathcal{P}_{fem} = ei = -Blvi = -\mathcal{P}_L}$$

Cette égalité traduit la conversion électromécanique parfaite dans ce problème d'induction de Lorentz.

Q6. Passons E.M. en notations complexes :

$$-\omega^2 m_T \underline{x} = -\alpha j \omega \underline{x} - k \underline{x} + i B \ell$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \frac{B \ell}{k - m_T \omega^2 + \alpha j \omega} i$$

Passons maintenant E.E. en notions complexes :

$$\underline{E} - B \ell j \omega \underline{x} = R i + j L \omega i$$

On injecte l'expression de \underline{x} dans la relation précédente :

$$\underline{E} - \frac{(B \ell)^2 j \omega}{k - m_T \omega^2 + \alpha j \omega} i = R i + j L \omega i$$

puis

$$\underline{E} = (R + j L \omega + \underline{Z}_m) i \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_m = \frac{(B \ell)^2 j \omega}{k - m_T \omega^2 + \alpha j \omega}$$

Q7.

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{k - m_T \omega^2 + \alpha j \omega}{(B \ell)^2 j \omega} = \frac{k}{(B \ell)^2 j \omega} + \frac{\alpha}{(B \ell)^2} + \frac{m_T j \omega}{(B \ell)^2}$$

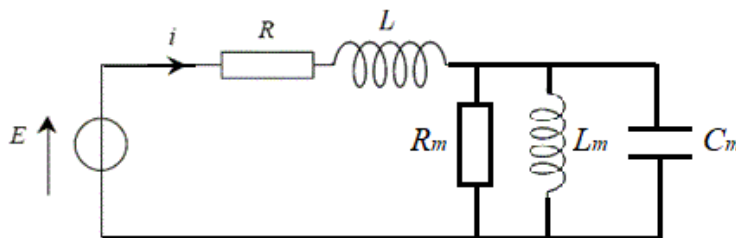
L'admittance \underline{Y}_m s'écrit bien sous la forme $\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m} + j C_m \omega + \frac{1}{j L_m \omega}$ avec

$$R_m = \frac{(B \ell)^2}{\alpha} \quad ; \quad C_m = \frac{m_T}{(B \ell)^2} \quad ; \quad L_m = \frac{(B \ell)^2}{k}$$

Q8. On remarque que l'admittance \underline{Y}_m est la somme de trois admittances : celle d'une résistance R_m , d'un condensateur de capacité C_m et d'une bobine d'inductance L_m .

Le dipôle d'impédance \underline{Z}_m est donc constitué d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine en parallèle (les admittances des dipôles en parallèle s'additionnent).

On obtient donc le schéma électrique équivalent du haut-parleur suivant :



Q9. On reprend le bilan de puissance de la **Q4.** en valeurs moyennes :

$$\langle E i \rangle = \langle R i^2 \rangle + \left\langle \frac{d\mathcal{E}_{tot}}{dt} \right\rangle + \langle \alpha v^2 \rangle \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{mag} + \mathcal{E}_m$$

Or, $\left\langle \frac{d\mathcal{E}_{tot}}{dt} \right\rangle = 0$ car \mathcal{E}_{tot} est une grandeur périodique.

Ainsi, on obtient bien la relation de l'énoncé :

$$\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle$$

En moyenne, la puissance fournie par le générateur se répartit entre la puissance dissipée par effet Joule et la puissance dissipée par frottement fluide. Cette dernière permet la mise en mouvement de l'air et est donc une puissance utile pour le fonctionnement du haut-parleur.

Q10. Par définition du rendement, on a :

$$\eta = \frac{\langle P_{son} \rangle}{\langle Ei \rangle} = \frac{\langle \alpha v^2 \rangle}{\langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\alpha} \frac{\langle i^2 \rangle}{\langle v^2 \rangle}}$$

On rappelle que les grandeurs étudiées sont sinusoïdales, de pulsation ω . Ainsi, les grandeurs réelles s'écrivent :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_m \cos(\omega t + \varphi_v) \\ i(t) &= i_m \cos(\omega t + \varphi_i) \end{aligned}$$

On obtient ensuite $\langle v^2 \rangle = \frac{v_m^2}{2}$ et $\langle i^2 \rangle = \frac{i_m^2}{2}$, ce qui donne l'expression du rendement :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{\alpha} \left(\frac{i_m}{v_m} \right)^2}$$

Or, $\underline{v} = j\omega \underline{x} = \frac{j\omega B\ell}{k - m_T\omega^2 + \alpha j\omega} \underline{i}$ d'après la question **Q6**. donc

$$\frac{i_m}{v_m} = \left| \frac{\underline{i}}{\underline{v}} \right| = \frac{\sqrt{(k - m_T\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}}{\omega B\ell}$$

On injecte cette relation dans l'expression du rendement :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{\alpha} \frac{(k - m_T\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}{\omega^2 (B\ell)^2}} = \frac{1}{1 + \frac{R\alpha}{(B\ell)^2} \frac{\left(\frac{k - m_T\omega^2}{\alpha} \right)^2 + \omega^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m} \left[1 + \left(\frac{m_T\omega}{\alpha} - \frac{k}{\alpha\omega} \right)^2 \right]}$$

On identifie avec la forme proposée dans l'énoncé :

$$\begin{cases} \frac{m_T}{\alpha} = \frac{Q}{\omega_0} \\ \frac{k}{\alpha} = Q\omega_0 \end{cases}$$

Ce qui donne $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_T}}$ et $Q = \frac{\sqrt{m_T k}}{\alpha}$

Q11. On obtient le comportement d'un filtre passe-bande : lorsque ω tend vers 0 ou $+\infty$, le rendement tend vers zéro ; lorsque ω tend vers ω_0 , le rendement est maximum et vaut $\eta_{max} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m}}$.

En effet, à basse fréquence, le mouvement est très lent, ce qui induit peu de puissance de frottement fluide donc un faible rendement.

À haute fréquence, l'inertie mécanique de l'équipage mobile implique une très faible vitesse de déplacement donc peu de puissance de frottement fluide : le rendement est très faible.

B Membranes élastiques - Figures de Chladni

Q12. Les lignes noires sur les figures représentent les noeuds de vibration de la plaque (zones immobiles où la poudre s'accumule).

Q13. On injecte la forme de la solution dans l'équation de propagation, sachant que :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d^2 X}{dx^2} Y T \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{d^2 Y}{dy^2} X T \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{d^2 T}{dt^2} X Y \end{cases}$$

On obtient alors :

$$T \left(\frac{d^2 X}{dx^2} Y + \frac{d^2 Y}{dy^2} X \right) - \frac{1}{c^2} X Y \frac{d^2 T}{dt^2} = 0$$

soit

$$\underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{\text{fonction de } x} = \underbrace{\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{\text{fonction de } y \text{ et } t} \quad (1)$$

Le terme de gauche ne peut pas être une fonction de y et de t donc est égal à une constante positive ou négative, notée $\mp; \alpha^2$, ce qui donne :

$$\boxed{\frac{d^2 X}{dx^2} \pm \alpha^2 X = 0}$$

En reprenant le même raisonnement pour Y , on obtient :

$$\underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{\text{fonction de } y} = \underbrace{\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} - \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{\text{fonction de } x \text{ et } t} = \text{constante} = \mp \beta^2$$

soit $\boxed{\frac{d^2 Y}{dy^2} \pm \beta^2 Y = 0}$

Q14. L'équation $\frac{d^2X}{dx^2} - \alpha^2 X = 0$ admet comme solution $X(x) = A \exp(-\alpha x) + B \exp(\alpha x)$.

Or, $z(x=0) = 0 \forall y, t$ donc $X(0) = 0$, de même pour $X(a) = 0$

En appliquant ces conditions aux limites, on obtient :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A \exp(-\alpha a) + B \exp(\alpha a) = 0 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} A = -B \\ -2A \operatorname{sh}(\alpha a) = 0 \end{cases}$$

donc $A = B = 0$. Ainsi, la seule solution satisfaisant les conditions aux limites est $X(x) = 0$, de même pour Y .

Pour avoir des solutions physiquement acceptables (c'est-à-dire non identiquement nulles), il faut donc utiliser les équations :

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + \beta^2 Y = 0$$

Q15. La forme des solutions est alors $X(x) = C \cos(\alpha x) + D \sin(\alpha x)$ et $Y(y) = E \cos(\beta y) + F \sin(\beta y)$.

En utilisant les conditions aux limites, on a :

$$\begin{cases} X(0) = C = 0 \\ X(a) = D \sin(\alpha a) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\sin(\alpha a) = 0$ car $D \neq 0$ soit $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ avec m entier non nul.

Finalement, on obtient $X(x) = X_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$ et, par analogie, $Y(y) = Y_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

Q16. On reprend l'équation (1) de la **Q13.** et on obtient :

$$\alpha^2 = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} - \beta^2 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dt^2} + [(\alpha^2 + \beta^2)c^2]T = 0$$

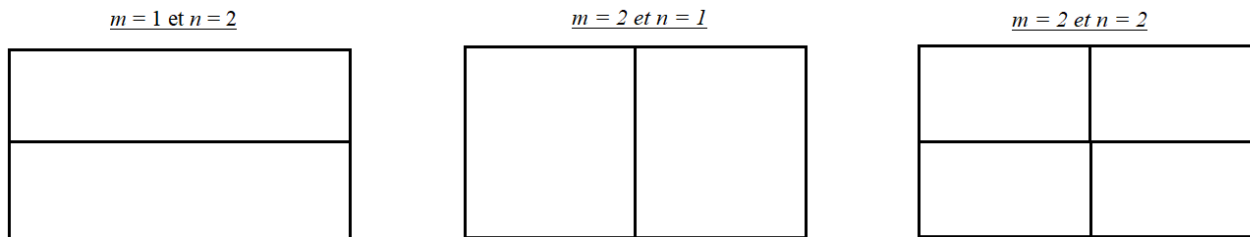
C'est l'équation attendue, on reconnaît celle d'un oscillateur harmonique de pulsations propres

$$\omega_{mn} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} c = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Q17.

— Pour $m = 1$ et $n = 2$, on a le mode propre 1 selon Ox et le mode 2 selon Oy .

Ainsi, les noeuds de vibrations seront en $x = 0$ et $x = a$ et en $y = 0, b/2$ et b , d'où la figure ci-dessous.



- Pour $m = 2$ et $n = 1$, les noeuds seront en $x = 0, a/2$ et a ainsi qu'en $y = 0$ et b .
- Pour $m = n = 2$, les noeuds seront en $x = 0, a/2$ et a , ainsi qu'en $y = 0, b/2$ et b .

C Filtre répartiteurs

Q18. On exprime le module de \underline{H}_b avec $n = 3$:

$$|\underline{H}_b| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a_2x^2)^2 + (a_1x - a_3x^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (a_1^2 - 2a_2)x^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)x^4 + a_3^2x^6}}$$

D'après l'énoncé, on a $|\underline{H}_b| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^6}}$

Par identification, on obtient donc :

$$\begin{cases} a_2^2 - 2a_1a_3 = 0 \\ a_1^2 - 2a_2 = 0 \\ a_3^2 = 1 \end{cases}$$

soit $a_1 = a_2 = 2$ et $a_3 = 1$

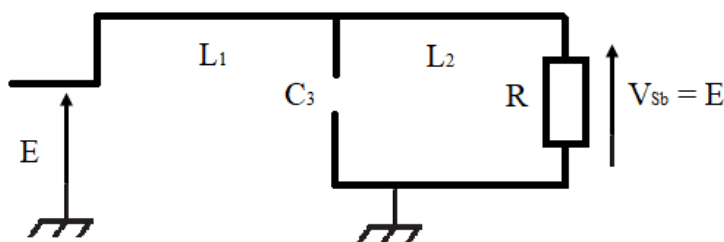
Q19. Pour commencer, on remarque que $\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H}_b = 1$ et $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \underline{H}_b = 0$, ce qui confirme le caractère passé-bas du filtre.

Raisonnons maintenant à l'aide des schémas équivalents du circuit à basse et haute fréquence.

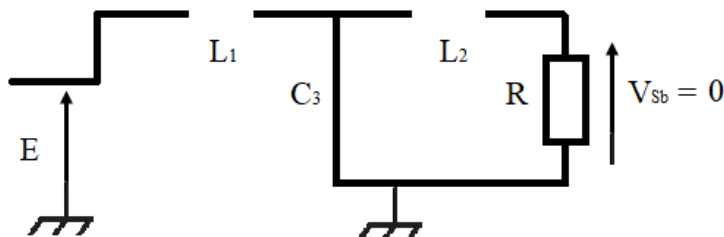
Attention : il y a une grosse erreur sur le schéma du circuit en figure 6. En effet, il ne doit pas y avoir de fil entre le point de potentiel E à gauche et la masse.

Dans la suite, nous utiliserons donc le "bon" schéma du circuit.

- À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert et la bobine à un fil. On obtient donc le schéma suivant, qui donne $\underline{V}_{Sb} = E$.



— À haute fréquence, le condensateur est équivalent à un fil et la bobine à un circuit ouvert. L'intensité traversant la résistance R est donc nulle. On obtient alors $V_{Sb} = Ri = 0$.



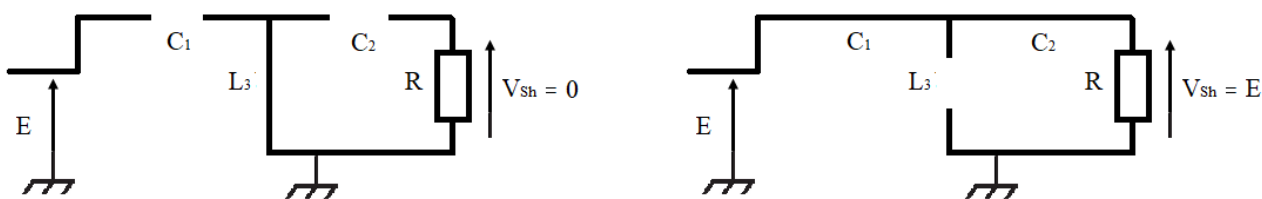
— En conclusion, le schéma de la figure 6 correspond à un filtre passe-bas, ce qui est compatible avec la fonction de transfert proposée.

Q20. On identifie la fonction de transfert proposée à la forme générale d'un filtre passe-bas de Butterworth avec $n = 3$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{L_1 + L_2}{R} = \frac{2}{\omega_0} \\ L_1 C_3 = \frac{2}{\omega_0^2} \\ \frac{L_1 L_2 C_3}{R} = \frac{1}{\omega_0^3} \end{cases}$$

On en déduit : $L_1 = \frac{3R}{2\omega_0}$; $L_2 = \frac{R}{2\omega_0}$; $C_3 = \frac{4}{3R\omega_0}$

Q21. On représente le schéma équivalent aux basse (à gauche) et haute (à droite) fréquences :



Dans le schéma de gauche, l'intensité traversant la résistance R est nulle d'où $V_{Sh} = 0$.

On remarque que le circuit a un comportement passe-haut, ce qui confirme le choix de cette structure pour les fréquences aiguës.

Cette structure est un filtre en cascade. On note V_i la tension aux bornes de L_3 et on a alors, avec des diviseurs de tension :

$$\underline{V_{Sh}} = \frac{R}{R + \underline{Z_{C_2}}} \underline{V_i} \quad \text{et} \quad \underline{V_i} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + \underline{Z_{C_1}}} \underline{E}$$

avec $\underline{Z_{eq}}$ l'impédance du dipôle correspondant à l'ensemble parallèle constitué de L_3 et de C_2 et R en série.

On obtient la fonction de transfert globale : $\underline{H_h} = \frac{\underline{V_{Sh}}}{\underline{E}} = \frac{\underline{V_{Sh}}}{\underline{V_i}} \times \frac{\underline{V_i}}{\underline{E}}$

D – Equation de propagation des ondes acoustiques

Q22. Dans le cadre de l'approximation acoustique, on limite les calculs au 1^{er} ordre sachant que $\frac{|P_1|}{P_0}$, $\frac{|\mu_1|}{\mu_0}$ et $\frac{|v_1|}{c}$ ainsi que leurs dérivées temporelles et spatiales sont des infiniment petits du 1^{er} ordre. On a également $|\xi_m| \ll \lambda$.

Q23. Système : { une particule de fluide de volume $d\tau$ }

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

- on néglige le poids et l'écoulement est supposé parfait donc pas de force de viscosité.

- Force pressante : $\vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)d\tau = -\frac{\partial P}{\partial x}d\tau\vec{e}_x = -\frac{\partial P_1}{\partial x}d\tau\vec{e}_x$ car $P(x,t) = P_0 + P_1(x,t)$

Dans le cadre de l'approximation acoustique, l'accélération de la particule de fluide s'écrit : $\vec{a} = \frac{\partial v_1}{\partial t}\vec{e}_x$

D'où le principe fondamental de la dynamique conduit à : $(\mu_0 + \mu_1)d\tau\frac{\partial v_1}{\partial t}\vec{e}_x = -\frac{\partial P_1}{\partial x}d\tau\vec{e}_x$

En projetant sur \vec{e}_x et en linéarisant l'équation (c'est-à-dire que l'on ne garde que les termes d'ordre 1), on

obtient : $\boxed{\mu_0\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}}$ (1)

En effet, $\mu_1\frac{\partial v_1}{\partial t}$ est un terme d'ordre 2, donc il est négligé dans le cadre de l'approximation acoustique.

Q24. L'équation de conservation de la masse s'écrit dans le cas d'une configuration unidimensionnelle :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(P\vec{v}_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu v_1) = 0$$

$$\text{Or : } \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial(\mu_0 + \mu_1)}{\partial t} = \frac{\partial \mu_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu v_1) = \frac{\partial}{\partial x}((\mu_0 + \mu_1)v_1) = \mu_0\frac{\partial v_1}{\partial x} \text{ en linéarisant dans le cadre de l'approximation acoustique.}$$

$$\text{D'où l'équation de conservation de la masse donne : } \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial v_1}{\partial x}} \quad (2)$$

Q25. La transformation subie par la particule de fluide étant isentropique, on peut écrire le coefficient de compressibilité isentropique ainsi : $\chi_s = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dP}$

Et au passage de l'onde sonore, la masse volumique varie de : $d\mu = (\mu_0 + \mu_1) - \mu_0 = \mu_1$ et la pression varie de : $dP = (P_0 + P_1) - P_0 = P_1$

D'où : $\chi_s = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dP} \Leftrightarrow \chi_s(\mu_0 + \mu_1)P_1 = \mu_1$ et en linéarisant dans le cadre de l'approximation acoustique, cela

donne : $\boxed{\mu_1 = \chi_s \mu_0 P_1}$ (3) ou $\boxed{\chi_s = \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1}}$

Q26. (3) dans (2) : $\chi_s \mu_0 \frac{\partial P_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}$ puis on dérive par rapport au temps : $\chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)$

$$\text{On dérive (1) par rapport à } x : \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}$$

$$\text{Or d'après le théorème de Schwarz : } \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right)$$

$$\text{Donc } \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0}$$

Conclusion : La surpression $P_1(x,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert, $\boxed{\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0}$

avec $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \chi_s}}$ la célérité des ondes sonores.

Application numérique : $\boxed{c = 343 \text{ m.s}^{-1}}$ (ou $3,4 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$)

E – Effet de l'onde sonore sur le haut-parleur

Q27. Il s'agit d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) de propageant selon les x croissants, d'où :

$\xi(x,t) = \xi_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$ (relation de dispersion qui découle de l'équation de d'Alembert montrée en Q26).

Q28. On exploite la relation de la question 23 en travaillant en complexe (puisqu'il s'agit d'une OPPH). Cela donne :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} \Leftrightarrow \mu_0 j \omega v_1 = -(-jk)P_1 \Leftrightarrow \boxed{Z = \frac{P_1}{v_1} = \mu_0 \frac{\omega}{k} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}}}$$

Application numérique : $\boxed{Z = 4,1 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}}$

Q29. La puissance de la force de surpression s'exerçant sur la membrane s'écrit :

$$\mathcal{P} = \vec{F}_{surp} \cdot \vec{v}_1 = -P_1 S \vec{e}_x \cdot v_1 \vec{e}_x = -P_1 S v_1 \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{P} = -\mu_0 c S v_1^2}$$

Et on peut aussi écrire l'expression de la force (je ne vois pas à quoi cela servait de calculer la puissance...) :

$$\vec{F}_{surp} = -\mu_0 c S v_1 \vec{e}_x \Leftrightarrow \boxed{\vec{F}_{surp} = -\mu_0 c S \vec{v}}$$

Par identification avec l'expression de la force exercée par le fluide sur la membrane ($\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$), on obtient : $\boxed{\alpha = \mu_0 c S}$

F – Intensité acoustique et densité volumique d'énergie sonore

Q30. L'intensité sonore est définie par la relation : $\boxed{I = \langle ||\vec{\Pi}|| \rangle}$

Q31. Utiliser une échelle logarithmique permet de tenir compte du fait que l'oreille est un détecteur logarithmique (on n'a pas la sensation que le son est deux fois plus fort lorsque l'intensité sonore est multipliée par deux). De plus les sons audibles couvrent une grande gamme de valeurs d'intensité sonore donc l'emploi de l'intensité sonore en décibels est plus commode.

Q32. On a : $I_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_{ref}} \right) \Leftrightarrow \boxed{I = I_{ref} 10^{\frac{I_{dB}}{10}} = 1,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}}$

On se place dans le cadre d'une OPPH donc les expressions de la vitesse et de la surpression sont :

$$v_1(x, t) = v_m \cos(\omega t - kx) \text{ et } P_1(x, t) = P_m \cos(\omega t - kx)$$

Par ailleurs, d'après Q28 : $P_1(x, t) = Z v_1(x, t)$

Alors : $I = \langle ||\vec{\Pi}|| \rangle = \langle P_1 v_1 \rangle = Z \langle v_1^2 \rangle = Z v_m^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} Z v_m^2 \Leftrightarrow \boxed{v_m = \sqrt{\frac{2I}{Z}} = 7,0 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

Puis : $\boxed{P_m = Z v_m = \sqrt{2ZI} = 29 \text{ Pa}}$

Remarque : $v_m \ll c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $P_m \ll P_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ donc approximation acoustique vérifiée.

On a : $\underline{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = j \omega \underline{\xi} \Leftrightarrow \underline{\xi} = \frac{\underline{v}}{j \omega}$ d'où : $\boxed{\xi_m = \frac{v_m}{\omega} = \frac{v_m}{2\pi f_0} = 11 \mu\text{m}}$

On a bien : $\boxed{\xi_m \ll \lambda = \frac{c}{f_0} = 34 \text{ cm}}$ donc l'approximation acoustique est vérifiée.

Q33. En se plaçant à une dimension spatiale comme le suggère l'énoncé, on a :

$$\text{div}(\vec{\Pi}_1) = \text{div}(P_1 \vec{v}_1) = \frac{\partial}{\partial x} (P_1 v_1) = P_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

Or d'après les questions 23, 24 et 25, on peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial P_1}{\partial t} = -\chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ \frac{\partial P_1}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{div}(\vec{\Pi}_1) = -\chi_s P_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} - \mu_0 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \chi_s P_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 \right)}$

Q34. On peut interpréter les deux termes comme étant les énergies cinétique volumique ($e_c = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2$) et potentielle volumique ($e_p = \frac{1}{2} \chi_s P_1^2$) associées à l'onde sonore.

Problème 2

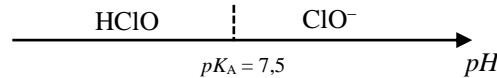
Dosage d'un produit bactéricide

A - Diagramme potentiel-pH du chlore

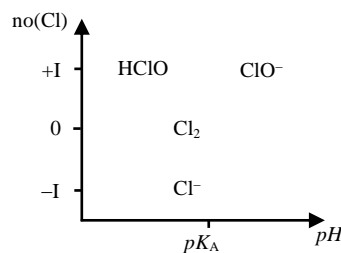
Q35. Dans Cl_2 , $\text{no}(\text{Cl}) = 0$ dans Cl^- , $\text{no}(\text{Cl}) = -I$ dans ClO^- , sachant que $\text{no}(\text{O}) = -II$, alors $\text{no}(\text{Cl}) = +I$

Q36. $\text{Cl}_2(\text{g})$ qui est à la fois réducteur dans le couple $(\text{ClO}^-/\text{Cl}_2(\text{g}))$ et oxydant dans le couple $(\text{Cl}_2(\text{g})/\text{Cl}^-)$ réagit sur lui-même. Il s'agit d'une **dismutation**.

Q37. Pour le couple $(\text{HClO} / \text{ClO}^-)$, le diagramme de prédominance s'obtient directement :



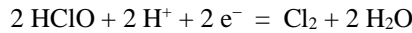
Q38. D'après les question précédentes, nous pouvons réaliser l'ébauche de diagramme (E, pH) suivante :



Sachant que dans un diagramme E-pH, on place les espèces de bas en haut par nombre d'oxydation croissant et qu'une frontière verticale sépare les domaines correspondant à deux espèces de no identiques, on en déduit :

- | |
|----------------------|
| A : HClO |
| B : Cl ₂ |
| C : Cl ⁻ |
| D : ClO ⁻ |

Q39. Soit le couple $(\text{HClO}/\text{Cl}_2(\text{g}))$ dont la demi-équation électronique s'écrit :



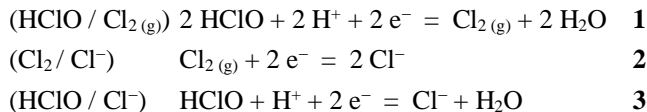
La formule de Nernst donne : $E_1 = E^\circ(\text{HClO}/\text{Cl}_2) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{HClO}]^2 [\text{H}^+]^2}{[\text{Cl}_2]} \right) \Leftrightarrow$

$$E_1 = E^\circ(. / .) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{HClO}]^2}{[\text{Cl}_2]} \right) + 0,06 \log [\text{H}^+] \Leftrightarrow E_1 = E^\circ(. / .) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{HClO}]^2}{[\text{Cl}_2]} \right) - 0,06 \text{pH}$$

Conclusion : Pour $0 < \text{pH} < 3,5$, la pente vaut $-0,06 \text{ V/pH}$

Q40. Par le calcul :

On considère les trois couples suivants :



On remarque alors que $\mathbf{3} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{2})$

$$\text{D'où : } \Delta_r G_3^\circ = \frac{1}{2}(\Delta_r G_1^\circ + \Delta_r G_2^\circ) \Leftrightarrow -2FE_3^\circ = \frac{1}{2}(-2FE_1^\circ - 2FE_2^\circ) \Leftrightarrow E_3^\circ = \frac{1}{2}(E_1^\circ + E_2^\circ) = 1,50 \text{ V}$$

Par lecture graphique :

Au niveau de la frontière HClO/Cl^- , à $\text{pH} = 3,5$, on a $E = 1,40 \text{ V}$.

Or pour ce couple, en utilisant la demi-équation électronique écrite ci-dessus, la formule de Nernst donne :

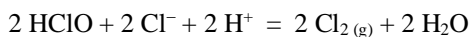
$$E = E^\circ(\text{HClO}/\text{Cl}^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{HClO}][\text{H}^+]}{[\text{Cl}^-]} \right) = E^\circ(\text{HClO}/\text{Cl}^-) + 0,03 \log \left(\frac{[\text{HClO}]}{[\text{Cl}^-]} \right) - 0,03 \text{pH}$$

De plus au niveau de la frontière, on $[\text{HClO}] = [\text{Cl}^-]$, d'où :

$$E = E^\circ(\text{HClO}/\text{Cl}^-) - 0,03 \text{pH} \Leftrightarrow E^\circ(\text{HClO}/\text{Cl}^-) = E + 0,03 \text{pH} = 1,51 \text{ V}$$

Les deux résultats sont bien cohérents.

Q41. En acidifiant le milieu, on va reformer du $\text{Cl}_2(\text{g})$ selon la réaction (voir Q40 : 1 – 2) :



or le **dichlore est un gaz toxique** d'où le danger si on se trouve en milieu clos.

B – Dosage par une méthode d'oxydoréduction

Q42. L'énoncé manquait de précision, il aurait fallu préciser que le degré chlorométrique donnait le volume de $\text{Cl}_2(\text{g})$ dégagé **en Litre**.

Pour un degré chlorométrique de 36, 1 L d'eau de Javel libère 36 L de $\text{Cl}_2(\text{g})$, or ici le berlingot ne contient que 250 mL d'eau de Javel, donc le volume de dichlore dégagé vaut 9,0 L.

On se place dans les conditions normales de température et de pression : $T = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$ et $P = P_{\text{atm}} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, cela donne une quantité de matière de $\text{Cl}_2(\text{g})$ dégagé (en supposant qu'il s'agisse d'un gaz parfait) :

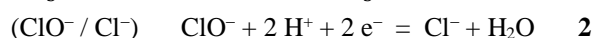
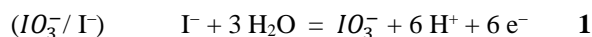
$$n(\text{Cl}_2(\text{g})) = \frac{PV}{RT} = 0,409 \text{ mol}$$

Q43. L'introduction de HCO_3^- en excès conduit à l'équilibre (autoprotolyse) : $2 \text{HCO}_3^- = \text{CO}_3^{2-} + \text{H}_2\text{CO}_3$

avec : $[\text{CO}_3^{2-}] = [\text{H}_2\text{CO}_3]$, d'où en considérant les deux couples mis en jeu, il y a deux écritures possibles pour le pH de la solution obtenue :

$$\begin{cases} \text{pH} = \text{p}K_{A1} + \log\left(\frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]}\right) \\ \text{pH} = \text{p}K_{A2} + \log\left(\frac{[\text{CO}_3^{2-}]}{[\text{HCO}_3^-]}\right) \end{cases} \text{ donc } 2 \text{pH} = \text{p}K_{A1} + \text{p}K_{A2} \Leftrightarrow \boxed{\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_{A1} + \text{p}K_{A2}) = 8,3} \text{ (idem énoncé)}$$

Q44. D'après les diagrammes E-pH, la réaction entre I^- et HClO à $\text{pH} = 8,3$ conduit à la formation de IO_3^- et Cl^- .

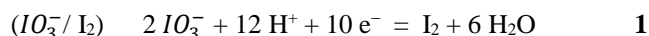


Alors $\mathbf{1} + 3 \times \mathbf{2}$ donne : $\boxed{\text{I}^- + 3 \text{ClO}^- = \text{IO}_3^- + 3 \text{Cl}^-}$

Q45. Pour $\text{pH} > 7,6$, IO_3^- et I^- peuvent être en équilibre, par contre lorsque $\text{pH} < 7,6$ alors ces deux espèces ne peuvent plus être en équilibre, elles vont réagir pour former I_2 : il y aura donc médiamutation.

Je ne vois pas comment rédiger la réponse à cette question...

Réaction de médiamutation :



Alors $\frac{1}{2}(\mathbf{1} + 5 \times \mathbf{2})$ donne : $\boxed{\text{IO}_3^- + 5 \text{I}^- + 6 \text{H}^+ = 3 \text{I}_2 + 3 \text{H}_2\text{O}}$

Q46. La réaction de dosage est celle de la question 44. A l'équivalence les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques, cela donne :

$$n(\text{I}^-)_{\text{versé}} = \frac{1}{3} n(\text{HClO})_{\text{initial}} \Leftrightarrow C' V_{\text{éq}} = \frac{1}{3} [\text{HClO}]_0 V_0 \Leftrightarrow \boxed{V_{\text{éq}} = \frac{[\text{HClO}]_0 V_0}{3 C'}}$$

$$\text{Or } [\text{HClO}]_0 = \frac{1}{4} \times \frac{n(\text{HClO})}{V_{\text{berlingot}}} = \frac{1}{4} \times \frac{0,409}{0,250} = 0,409 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

D'où le volume équivalent : $\boxed{V_{\text{éq}} = 27,3 \text{ mL}}$