

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE-CHIMIE

e3a PSI 2022

Conception d'un prototype de machine à pancakes

Vous pouvez envoyer vos remarques à Fabien PAUCHET (fabien-christia.pauchet@ac-lille.fr) et Gaudeline WAGNER (gaudeline.wagner@ac-lille.fr)

I Chauffage des poêles par induction

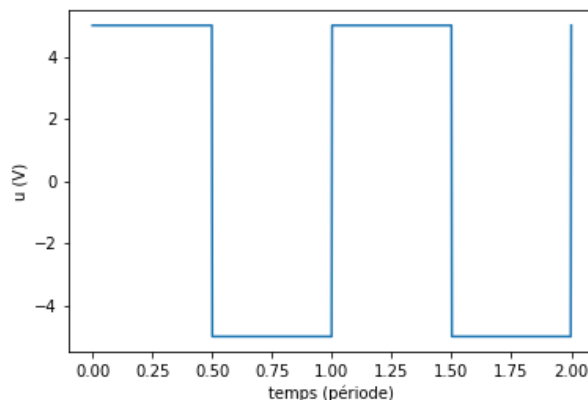
I.1 Onduleur RLC série

Q1. L'objectif d'un onduleur est de convertir un signal électrique continu en signal électrique alternatif. Dans la charge RLC série, le courant est continu du fait de la présence d'une bobine. Si l'inductance de la bobine est suffisamment élevée, on pourra considérer le courant comme quasiment constant : on a donc une source de courant.

Q2. Étudions l'évolution de la tension u au cours du temps.

Dans la première phase, K_1 et K_3 sont fermés tandis que K_2 et K_4 sont ouverts. Avec une loi des mailles, on obtient : $u = E$.
 Dans la deuxième phase, K_2 et K_4 sont fermés tandis que K_1 et K_3 sont ouverts. Avec une loi des mailles, on obtient : $u = -E$.

u est donc une tension créneau variant entre $-E$ et $+E$ (on prendra arbitrairement $E = 5$ V dans la figure suivante).



Q3. On a, au niveau de la charge RLC série : $u = Ri + u_c + L \frac{di}{dt}$

En dérivant cette expression et en utilisant $\frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C}$, on obtient alors :

$$\frac{du}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + L \frac{d^2i}{dt^2}$$

puis, en divisant par L :

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \frac{du}{dt} \quad \text{avec} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \quad (1)$$

On en déduit : $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$

Q4. $\underline{H}(j\omega)$ a la dimension d'une conductance électrique.

Pour déterminer son expression, on passe l'équation différentielle 1 en notations complexes :

$$-\omega^2 \underline{i} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{i} + \omega_0^2 \underline{i} = \frac{j\omega}{L} \underline{u} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{j\omega}{L}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega}$$

De plus, on a $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R}$ donc $L = \frac{RQ}{\omega_0}$, ce qui donne finalement :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{j\omega\omega_0}{QR}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega} = \frac{\frac{j\omega}{Q\omega_0 R}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$$

On peut également poser $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et on obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{jx}{QR}}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$

Le module de \underline{H} s'écrit :

$$\boxed{G(\omega) = \frac{\frac{\omega}{Q\omega_0 R}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

— Quand $\omega \ll \omega_0$, on a $G \sim \frac{\omega}{Q\omega_0 R}$.

— Quand $\omega \gg \omega_0$, on a $G \sim \frac{\omega_0}{Q\omega R}$.

On voit donc que G tend vers 0 quand ω tend vers 0 ou vers $+\infty$.

Q5. Pour déterminer la valeur maximale de G , on reprend la notation avec la pulsation réduite de \underline{H} et on la met sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

ce qui donne

$$G = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

G est maximal quand son dénominateur est minimal soit quand $x = 1$, ou encore quand $\omega = \omega_0$.

On a alors

$$G_{\max} = G(\omega = \omega_0) = \frac{1}{R}$$

A.N. : $G_{\max} \simeq 0,14 \Omega^{-1} \simeq 0,14 \text{ S}$

Q6. D'après les questions précédentes, on remarque qu'il s'agit ici d'un filtrage passe-bande d'ordre 2 : le gain tend vers 0 à basses et hautes fréquences et passe par un maximum à la fréquence de résonance.

Le but de l'onduleur est d'obtenir le courant le plus sinusoïdal possible. En réglant $\omega = \omega_0$, on récupère (si le filtre est suffisamment sélectif) la fondamentale du signal créneau, ce qui permet d'avoir un courant sinusoïdal d'amplitude relativement importante (ici, $i_{\max} = E/R = 1,7 \text{ A}$).

La fréquence associée est $f = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ A.N. : $f_0 \simeq 39 \text{ kHz}$.

I.2 Puissance induite dans la poêle

Q7. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit : $\boxed{\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

Calculons la circulation sur le contour \mathcal{L} du champ électrique \vec{E} :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \iint_{S(\mathcal{L})} \text{rot}(\vec{E}) \cdot d^2\vec{S} \quad (\text{théorème de Stokes}) \\ &= \iint_{S(\mathcal{L})} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d^2\vec{S} \quad (\text{équation de Maxwell-Faraday}) \\ &= -\frac{d}{dt} \iint_{S(\mathcal{L})} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} \quad (S(\mathcal{L}) \text{ fixe}) \\ \oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

où Φ est le flux du champ magnétique à travers la surface s'appuyant sur le contour fermé et orienté \mathcal{L} . On retrouve la loi de Faraday.

Q8. On va utiliser la relation précédente sur un contour \mathcal{L} circulaire, de centre O et de rayon R , orienté selon $+\vec{u}_\theta$. On obtient :

$$\oint_{\mathcal{L}} E(r, t) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \Phi = \iint_{S(\mathcal{L})} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = B \pi r^2$$

Remarque : $\vec{d^2S}$ est orientée selon la règle de la main droite à partir de l'orientation de \mathcal{L}

Cela donne alors :

$$E(r, t) 2\pi r = -\frac{\pi r^2 \mu_0 \mu_r}{2R} \frac{di}{dt} \Rightarrow E(r, t) = -\frac{r \mu_0 \mu_r}{4R} \frac{di}{dt} = \frac{r \omega I_0 \mu_0 \mu_r}{4R} \sin(\omega t)$$

Q9. D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma r \omega I_0 \mu_0 \mu_r}{4R} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

La puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule est :

$$p = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \gamma \left(\frac{\mu_0 \mu_r r I_0 \omega}{4R} \right)^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\mu_0 \mu_r r I_0 \omega}{4R} \right)^2$$

Q10.

$$P_{\text{ind}} = \iiint_V p d^3V = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\mu_0 \mu_r I_0 \omega}{4R} \right)^2 \iiint r^3 dr d\theta dz = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\mu_0 \mu_r I_0 \omega}{4R} \right)^2 \times \frac{a^4}{4} \times 2\pi e$$

donc on retrouve bien l'expression de l'énoncé :

$$P_{\text{ind}} = \frac{\gamma \pi (\mu_0 \mu_r \omega I_0)^2 e a^4}{64 R^2}$$

Q11. $\gamma_{\text{alu}} > \gamma_{\text{fonte}}$ mais $\mu_{r,\text{alu}} = 1 < \mu_{r,\text{fonte}}$.

Comme, numériquement, $\gamma_{\text{alu}} \times \mu_{r,\text{alu}}^2 = 4,0 \cdot 10^7 < \gamma_{\text{fonte}} \times \mu_{r,\text{fonte}}^2 = 6,4 \cdot 10^9$,

on a $P_{\text{ind,alu}} < P_{\text{ind,fonte}}$ ou encore $\frac{P_{\text{ind,fonte}}}{P_{\text{ind,alu}}} = 160$.

Ainsi, la puissance Joule dissipée dans une poêle en fonte est supérieure à celle dans une poêle en aluminium : le chauffage par induction est plus efficace dans une poêle en fonte.

Q12. Il s'agit de l'effet de peau. On trouve $\delta = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

En prenant une épaisseur de poêle de l'ordre du centimètre, on voit que $e \ll \delta$.

Il faudrait donc prendre en compte l'effet de peau pour faire un calcul plus précis de la puissance dissipée.

Le volume dans lequel apparaissent les courants de Foucault est plus petit que ce que l'on a supposé : on a donc surestimé la puissance dissipée par effet Joule.

I.3 Influence du nombre de spires sur la température de la poêle

Q13. On étudie le système constitué d'un tronçon de poêle de section S , situé entre les abscisses x et $x + dx$.

Effectuons un bilan énergétique entre deux instants voisins t et $t + dt$:

★ à l'abscisse x , il entre dans le système une énergie thermique

$$\delta Q_e = \mathcal{P}_{\text{th}}(x, t) dt = j_{\text{th}}(x, t) S dt$$

★ à l'abscisse $x + dx$, il sort du système une énergie thermique

$$\delta Q_s = j_{\text{th}}(x + dx, t) S dt$$

★ dans le volume du système, il se crée une énergie thermique

$$\delta Q_c = p S dx dt$$

D'après le premier principe de la thermodynamique, pour une transformation isochore, entre t et $t + dt$, l'énergie interne δU du système varie de :

$$d(\delta U) = \delta U(t+dt) - \delta U(t) = \delta Q_e - \delta Q_s + \delta Q_c = [j_{\text{th}}(x, t) - j_{\text{th}}(x + dx, t)] S dt + p S dx dt = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} dx S dt + p S dx dt$$

Par ailleurs, on a :

$$d(\delta U) = \delta C_V dT = \rho c S dx dT = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

En égalant les deux expressions de $d(\delta U)$, on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} + p$$

En combinant cette équation de conservation avec la loi de Fourier projetée sur \vec{u}_x , $j_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, on obtient l'équation de l'énoncé

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p}{\rho c}}$$

Q14. En passant en ordre de grandeur l'équation de diffusion sans terme de source, on obtient : $\frac{T}{\tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{T}{\ell^2}$

soit $\tau = \frac{\ell^2 \rho c}{\lambda}$

En prenant $\ell \sim 1$ cm (ordre de grandeur de l'épaisseur de la poêle), on trouve $\tau \sim 7$ s.

Cela indique que la poêle chauffe rapidement (par rapport à la durée d'utilisation usuelle) : il n'y aura pas besoin d'un long préchauffage avant de cuire les pancakes !

Q15. On a $T_p = a.n + b$ soit $n = \frac{T_p - b}{a}$

En prenant $T_p = 160^\circ\text{C}$, $b = 41^\circ\text{C}$ et $a = 2,18^\circ\text{C}$, on trouve $n = 55$ spires, ce qui est une valeur tout à fait raisonnable.

Partie II – Déversoir de pâte

II.1 – Modèle parfait

Q16. Théorème de Bernoulli :

Dans le cadre d'un écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible, la pression totale $P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2$ se conserve le long d'une ligne de courant (en posant (Oz) un axe vertical ascendant).

Appliqué à la situation de l'exercice, cela donne : $P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$

Or : $h_p(t) = z_1 - z_2$ et $P_1 = P_2 = P_0$

D'où l'écriture de la relation de Bernoulli : $\rho g h_p(t) + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Leftrightarrow g h_p(t) + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{1}{2} v_2^2$

Q17. L'écoulement étant supposé incompressible et homogène, la conservation du débit volumique donne :

$$D_{V,1} = D_{V,2} \Leftrightarrow v_1 \pi R_1^2 = v_2 \pi R_2^2 \Leftrightarrow v_1(t) = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 v_2(t)$$

Q18. D'après Q16 et Q17, on obtient : $\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4\right) v_2^2 = g h_p(t) \Leftrightarrow v_2(t) = \sqrt{\frac{2g h_p(t)}{1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4}}$

Q19. D'après Q17, on a : $v_1(t) = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 v_2(t) \Leftrightarrow -\frac{dh_p}{dt} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \sqrt{\frac{2g h_p(t)}{1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4}} \Leftrightarrow \frac{dh_p}{dt} = -\sqrt{\frac{2g h_p(t)}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1}}$

Q20. Par séparation des variables, on obtient : $\frac{dh_p}{\sqrt{h_p}} = -\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1}} dt$

On peut alors intégrer sur la durée de la vidange :

$$\int_{h_0}^0 \frac{dh_p}{\sqrt{h_p}} = -\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1}} \int_0^{\tau_p} dt \Leftrightarrow -\sqrt{h_0} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1}} \tau_p \Leftrightarrow \tau_p = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1\right]$$

Q21. AN : $\tau_p = 0,20 \text{ s} \ll \tau_{exp} = 1,5 \text{ s}$ le temps de vidange a été nettement sous-estimé. Il aurait fallu prendre en compte la viscosité du fluide (la pâte).

II.2 – Modèle visqueux

Q22. La vitesse moyenne peut-être estimée : $v_m \approx \frac{h_0}{\tau_{exp}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Puis le nombre de Reynolds : $Re = \frac{\rho d v_m}{\eta} = 3 \cdot 10^{-1}$

On a bien $Re < 2 \cdot 10^3$ donc la loi de Darcy-Weisbach est valide.

Q23. La relation de Bernoulli généralisée s'écrit entre les points 1 et 2 :

$$\left(P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2\right) - \left(P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2\right) = \Delta P_c$$

Or on a toujours $P_1 = P_2 = P_0$ et ici $h_v(t) = z_1 - z_2$, de plus on néglige l'effet du rétrécissement, donc $R_1 = R_2$ ainsi $v_1 = v_2$ (d'après Q17)

Alors : $\rho g h_v = \frac{64\eta}{\rho d v_m} \frac{\rho v_m^2}{2} \frac{h_v}{d} \Leftrightarrow v_m = \frac{\rho g (2R_1)^2}{32\eta} \Leftrightarrow \frac{dh_v}{dt} = -\frac{\rho g R_1^2}{8\eta}$

Q24. En intégrant la relation précédente, sachant que $h_v(t=0) = h_0$, on obtient : $h_v(t) = h_0 - \frac{\rho g R_1^2}{8\eta} t$

A la fin de la vidange, on a : $h_v(\tau_v) = 0 \Leftrightarrow h_0 - \frac{\rho g R_1^2}{8\eta} \tau_v = 0 \Leftrightarrow \tau_v = \frac{8\eta h_0}{\rho g R_1^2}$

Q25. AN : $\tau_v = 1,3 \text{ s}$

La valeur s'approche de celle de $\tau_{\text{exp}} = 1,5$ s donnée en Q21... mais l'écart relatif est encore de 13%. Pour affiner la modélisation, il faudrait tenir du rétrécissement du cylindre de R_1 à R_2 , ce qui introduirait une **perte de charge singulière** (et on n'aurait plus $v_1 = v_2$ ce qui avait simplifié l'expression de la différence des pressions totales en Q23).

III Autour du sirop d'érable

III.1 Manchon de sirop d'érable

Q26. En ordre de grandeur, on a : $\left| \rho \frac{\partial v}{\partial t} \right| \simeq \rho \frac{v}{T}$ avec $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ et $\left| \eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right| \simeq \eta \frac{v}{h_0^2}$

Ainsi

$$\left| \rho \frac{\partial v}{\partial t} \right| \ll \left| \eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right| \Rightarrow \Omega \ll \frac{2\pi \eta}{\rho h_0^2} \simeq 4.10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

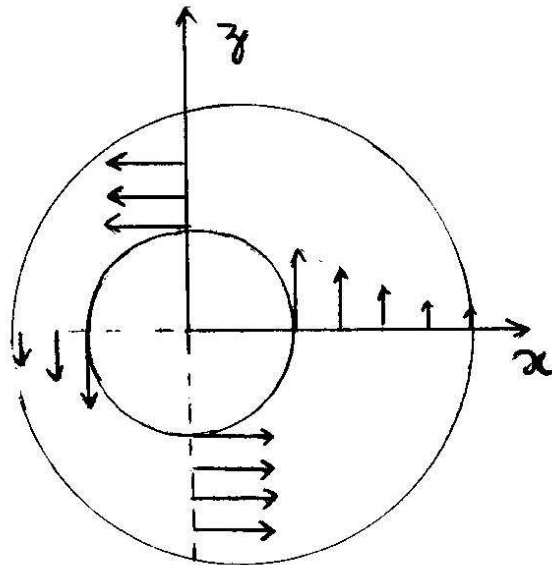
On a $\Omega = 4\pi \text{ rad.s}^{-1}$: cette condition est donc bien vérifiée ici.

Q27. $\forall \theta$, $v(r = a, \theta) = a\Omega$ donc l'expression de $v(r, \theta)$ vérifie bien la condition aux limites imposée en $r = a$.

On a

$$\begin{cases} v(r, \theta = 0) = a\Omega + \frac{\rho g}{2\eta} [(r-a)^2 - 2(r-a)h] \\ v(r, \theta = \pi/2) = v(r, \theta = 3\pi/2) = a\Omega \quad \forall r \\ v(r, \theta = \pi) = a\Omega - \frac{\rho g}{2\eta} [(r-a)^2 - 2(r-a)h] \end{cases}$$

On obtient alors le champ des vitesses suivant :



Q28. Le débit volumique s'écrit :

$$D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{d^2S} = \iint_S v(r, \theta) dr dz = L \int_a^{a+h} v(r, \theta) dr$$

Le débit volumique par unité de longueur s'écrit donc : $Q(\theta) = \frac{D_v}{L} = \int_a^{a+h} v(r, \theta) dr$

On calcule ensuite :

$$Q(\theta) = a\Omega h + \frac{\rho g \cos \theta}{2\eta} \int_a^{a+h} [(r-a)^2 - 2(r-a)h] dr = a\Omega h + \frac{\rho g \cos \theta}{2\eta} \left[\frac{(r-a)^3}{3} - (r-a)^2 h \right]_a^{a+h}$$

soit
$$Q(\theta) = a\Omega h - \frac{\rho g h^3 \cos \theta}{3\eta}$$

Q29.

$$Q(\theta) = Q \Rightarrow a\Omega h - \frac{\rho g h^3 \cos \theta}{3\eta} = Q \Rightarrow \frac{\rho g h^3 \cos \theta}{3\eta} - a\Omega h + Q = 0$$

On retrouve bien $F(h) = 0$ avec l'expression proposée par l'énoncé.

Q30. On dérive la fonction $F(h)$ en $F'(h) = \frac{\rho g h^2 \cos \theta}{\eta} - a\Omega$. Cette dérivée s'annule en $h_m = \sqrt{\frac{a\Omega \eta}{\rho g \cos \theta}}$.

On calcule $F(h_m) = Q - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(a\Omega)^3 \eta}{\rho g \cos \theta}}$. On peut alors réaliser le tableau de variation de la fonction étudiée :

h	0	h_m	
$F'(h)$		-	+
$F(h)$	Q	$F(h_m)$	

Ainsi, $F(h)$ ne peut s'annuler que si $F(h_m) < 0$ soit si
$$Q < \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(a\Omega)^3 \eta}{\rho g \cos \theta}} = Q_{\max}(\theta)$$

Pour qu'il existe une solution pour tout angle θ , il faut que l'inégalité précédente soit vérifiée dans le cas le plus contraignant, c'est-à-dire pour $\cos \theta = 1$.

On a alors
$$Q < \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(a\Omega)^3 \eta}{\rho g}}$$

Q31. En raisonnant par unité de longueur, on a

$$m_{\max} = D_{m,\max} \times T = \rho Q_{\max} \frac{2\pi}{\Omega} \quad \text{soit} \quad m_{\max} = \frac{4\pi\rho}{3\Omega} \sqrt{\frac{(a\Omega)^3 \eta}{\rho g}} = \frac{4\pi}{3\Omega} \sqrt{\frac{(a\Omega)^3 \rho \eta}{g}}$$

Partie III – Autour du sirop d'érable

III.2 – Mesure de la proportion de saccharose dans le sirop d'érable

Q32. D'après la loi de Hess :

$$\Delta_r H^\circ = \sum \nu_i \Delta_f H_i^\circ = -27 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta_r S^\circ = \sum \nu_i S_{m,i}^\circ = 5,0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Q33. On a : $\Delta_r G_{(T)}^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$ d'où à $T = 298 \text{ K}$, $\Delta_r G^\circ = -28,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

Puis : $K_{(T)}^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G_{(T)}^\circ}{RT}\right)$ d'où à $T = 298 \text{ K}$, $K^\circ = 9,86 \cdot 10^4 > 10^3$ Donc **réaction quantitative**.

Q34. Par définition, la vitesse de réaction s'écrit : $v = -\frac{d[S]}{dt}$

De plus d'après l'énoncé : $v = k_1[S]$

Plus rigoureusement : $v = k[S][H_2O] \approx k_1[S]$ car comme $[S]_0 \ll [H_2O]_0$ on peut utiliser la méthode de la dégénérescence de l'ordre et poser la constante apparente : $k_1 = k[H_2O]_0$

On obtient l'équation différentielle : $\frac{d[S]}{dt} + [S] = 0$

Résolution immédiate : $[S](t) = [S]_0 e^{-k_1 t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{[S](t)}{[S]_0}\right) = -k_1 t$

Le résultat de la régression linéaire réalisée en traçant $\ln\left(\frac{[S](t)}{[S]_0}\right)$ en fonction du temps donne :

Un coefficient de corrélation $r^2 = 0,9998$ donc la régression est valide et la pente vaut : $-1,39 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$

Conclusion : $k_1 = 1,39 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$

Q35. La loi d'Arrhénius donne :

$$\begin{cases} k_1 = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_1}\right) \\ k_2 = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_2}\right) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \frac{k_1}{k_2} = \exp\left[-\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] \Leftrightarrow E_a = \frac{R}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$$

AN : $E_a = 1,09 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} = 109 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

Q36. Pour l'eau pure, sous la pression P° , on a $T = T_{\text{fus}}$ l'équilibre : $\text{H}_2\text{O}_{(s)} = \text{H}_2\text{O}_{(l)}$

D'où l'enthalpie libre du système est un son minimum, c'est-à-dire : $dG = 0$ ce qui implique, à T et P fixées, l'égalité des potentiels chimique : $\mu_{\text{eau}}^{*,\text{liq}}(T_{\text{fus}}) = \mu_{\text{eau}}^{*,\text{sol}}(T_{\text{fus}})$ (1)

Q37. Par définition :

$$x_{\text{eau}} = \frac{n_{\text{eau,liq}}}{n_{\text{eau,liq}} + n_{\text{sucrose}}} = \frac{\frac{m_{\text{eau}}}{M_{\text{eau}}}}{\frac{m_{\text{eau}}}{M_{\text{eau}}} + \frac{m_{\text{sucrose}}}{M_{\text{sucrose}}}} \Leftrightarrow x_{\text{eau}} = \frac{1}{1 + \frac{m_{\text{sucrose}}}{m_{\text{eau}}} \frac{M_{\text{eau}}}{M_{\text{sucrose}}}}$$

Par ailleurs, à T'_{fus} il y a l'équilibre de l'eau entre la phase solide et la phase liquide donne :

$$\mu_{\text{eau}}^{\text{liq}}(T'_{\text{fus}}) = \mu_{\text{eau}}^{\text{sol}}(T'_{\text{fus}})$$

Or dans la phase solide, l'eau est pure, d'où : $\mu_{\text{eau}}^{\text{sol}}(T'_{\text{fus}}) = \mu_{\text{eau}}^{*,\text{sol}}(T'_{\text{fus}})$

Mais dans la phase liquide sa fraction molaire vaut x_{eau} , d'où : $\mu_{\text{eau}}^{\text{liq}}(T'_{\text{fus}}) = \mu_{\text{eau}}^{*,\text{liq}}(T'_{\text{fus}}) + RT'_{\text{fus}} \ln(x_{\text{eau}})$

On en déduit : $\mu_{\text{eau}}^{*,\text{sol}}(T'_{\text{fus}}) = \mu_{\text{eau}}^{*,\text{liq}}(T'_{\text{fus}}) + RT'_{\text{fus}} \ln(x_{\text{eau}})$ (2)

Q38. D'après les relations précédentes (2) – (1) donne :

$$\mu_{\text{eau}}^{*,\text{sol}}(T'_{\text{fus}}) - \mu_{\text{eau}}^{*,\text{sol}}(T_{\text{fus}}) = \mu_{\text{eau}}^{*,\text{liq}}(T'_{\text{fus}}) - \mu_{\text{eau}}^{*,\text{liq}}(T_{\text{fus}}) + RT'_{\text{fus}} \ln(x_{\text{eau}})$$

Or en intégrant les relations de Gibbs-Duhem entre T_{fus} et T'_{fus} , on obtient :

$$\mu_{\text{eau}}^{*,\text{sol}}(T'_{\text{fus}}) - \mu_{\text{eau}}^{*,\text{sol}}(T_{\text{fus}}) = -S_{\text{eau}}^{*,\text{sol}}(T'_{\text{fus}} - T_{\text{fus}}) \quad \text{et} \quad \mu_{\text{eau}}^{*,\text{liq}}(T'_{\text{fus}}) - \mu_{\text{eau}}^{*,\text{liq}}(T_{\text{fus}}) = -S_{\text{eau}}^{*,\text{liq}}(T'_{\text{fus}} - T_{\text{fus}})$$

D'où : $(S_{\text{eau}}^{*,\text{liq}} - S_{\text{eau}}^{*,\text{sol}})(T'_{\text{fus}} - T_{\text{fus}}) = RT'_{\text{fus}} \ln(x_{\text{eau}})$

Enfin, on a : $S_{\text{eau}}^{*,\text{liq}} - S_{\text{eau}}^{*,\text{sol}} = \Delta_{\text{fus}} S = \frac{\Delta_{\text{fus}} H}{T_{\text{fus}}}$

Conclusion : $(T'_{\text{fus}} - T_{\text{fus}}) \Delta_{\text{fus}} H = RT'_{\text{fus}} T_{\text{fus}} \ln(x_{\text{eau}})$

Q39. On a : $x_{eau} = 1 - x_{sucr\acute{e}}$ et comme $x_{sucr\acute{e}} \ll 1$, alors : $\ln(x_{eau}) = \ln(1 - x_{sucr\acute{e}}) \approx -x_{sucr\acute{e}}$

Par ailleurs T'_{fus} est peu éloigné de T_{fus} , d'où la relation de Q38 s'écrit :

$$(T'_{fus} - T_{fus})\Delta_{fus}H = -RT_{fus}^2 x_{sucr\acute{e}} \Leftrightarrow T_{fus} - T'_{fus} = \frac{RT_{fus}^2}{\Delta_{fus}H} x_{sucr\acute{e}}$$

Conclusion : $T_{fus} - T'_{fus} = K x_{sucr\acute{e}}$ avec $K = \frac{RT_{fus}^2}{\Delta_{fus}H}$

Q40. AN : $K = 103$ puis $x_{sucr\acute{e}} = \frac{T_{fus} - T'_{fus}}{K} = 1,46 \cdot 10^{-2}$

Par définition, on a : $M_{sucr\acute{e}} = \frac{m_{sucr\acute{e}}}{n_{sucr\acute{e}}}$ or : $n_{sucr\acute{e}} = x_{sucr\acute{e}} \times n_{tot} \approx x_{sucr\acute{e}} \times n_{eau} = x_{sucr\acute{e}} \times \frac{m_{eau}}{M_{eau}}$

D'où : $M_{sucr\acute{e}} = \frac{m_{sucr\acute{e}}}{m_{eau} x_{sucr\acute{e}}}$ et pour une solution à 15% en masse de sirop d'érable : $\frac{m_{sucr\acute{e}}}{m_{eau}} = \frac{15}{85}$

AN : $M_{sucr\acute{e}} = 218 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Q41. Tableau d'avancement ayant du saccharose pur à l'état initial :

	Saccharose + H ₂ O _(l)	=	glucose + fructose		n_{tot}
EI	1		0	0	1
		excès			
EF	1-y		y	y	1+y

La masse molaire moyenne du mélange de sucre s'écrit : $M_{sucr\acute{e}} = \frac{(1-y)M_{sac} + yM_{glu} + yM_{fru}}{1+y}$

On en déduit : $y = \frac{M_{sac} - M_{sucr\acute{e}}}{M_{sac} + M_{sucr\acute{e}} - M_{fru} - M_{glu}} = 0,62$

Puis : $x_{sac} = \frac{1-y}{1+y} = 0,23$ **fraction molaire en saccharose dans le sirop d'érable**

Et de même : $x_{glu} = x_{fru} = \frac{y}{1+y} = 0,38$

Autre méthode (plus rapide) :

$M_{sucr\acute{e}}$ étant la masse molaire moyenne, on a directement : $M_{sucr\acute{e}} = x_{sac}M_{sac} + x_{glu}M_{glu} + x_{fru}M_{fru}$

Or, $M_{glu} = M_{fru}$ et $x_{glu} + x_{fru} = 1 - x_{sac}$

D'où : $M_{sucr\acute{e}} = x_{sac}M_{sac} + (1 - x_{sac})M_{glu} \Leftrightarrow x_{sac} = \frac{M_{sucr\acute{e}} - M_{glu}}{M_{sac} - M_{glu}} = 0,23$

Par définition, la fraction massique en saccharose dans le sirop d'érable vaut :

$$w_{sac} = \frac{m_{sac}}{m_{sac} + m_{glu} + m_{fru}} = \frac{n_{sac}M_{sac}}{n_{sac}M_{sac} + n_{glu}M_{glu} + n_{fru}M_{fru}}$$

$$\Leftrightarrow w_{sac} = \frac{x_{sac}}{x_{sac} + \frac{x_{glu}M_{glu} + x_{fru}M_{fru}}{M_{sac}}} = 0,37$$