MINES – PONTS 2015 PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE Filière : PSI

Thierry.guillot@ac-besancon.fr

(Durée de l'épreuve : 3 heures) L'usage de la calculatrice est autorisé

ASPECTS DE LA PROPULSION SPATIALE

Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs.

I.−Généralités

I.A. – Aspect cinétique – Lois de vitesse

❑ **1** – Commençons par préciser le référentiel dans lequel on calcule les quantités de mouvement, puisque ceci n'est pas fait dans l'énoncé : on les calcule dans le référentiel terrestre. Notons également une maladresse de l'énoncé : on nous parle **du** système constitué de la fusée à l'instant t et on nous demande « sa quantité de mouvement aux instants t et $t + dt$ ». Tel que l'énoncé est rédigé, il y a en réalité deux systèmes différents, de masse différente, à prendre en compte : premier système, la fusée et tout ce qu'elle contient à l'instant t. La quantité de mouvement de ce système, à l'instant t est : $\boxed{\vec{p}_f(t) = m(t)\, v(t)\vec{u}_z}$. Second système, la fusée et son contenu à l'instant $t + dt$. La quantité de mouvement de ce second système est : $\vec{p}_f(t + dt) = m(t + dt)\, v(t + dt)\vec{u}_z$, soit encore $\boxed{\vec{p}_f(t + dt) = (m(t) - D_m dt)(\, v(t) + dv)\vec{u}_z}$. Celle des gaz éjecté pendant dt est : $\boxed{\vec{p}_g(t + dt) = D_m dt(\, v(t) - u)\vec{u}_z}$.

❑ **2** – Puisque le système considéré, appelé {fusée + gaz} (à nouveau de façon très maladroite puisque « fusée » désigne deux systèmes différents selon qu'on le considère à t ou à $t + dt$) est une réunion de plusieurs sous-systèmes, la loi à utiliser ici est le théorème de la résultante cinétique, donc une partie du principe fondamental de la dynamique. Précisons le système, fermé, à prendre en compte : la fusée et son contenu à l'instant t, qui devient ensuite la réunion de la fusée à $t + dt$ et du gaz qui a été éjecté entre t et $t + dt$. Et il manque des hypothèses dans l'énoncé : on néglige les frottements de l'air (et on suppose que le champ de pesanteur est uniforme, bien que la fusée s'éloigne du sol) :
$\frac{\vec{p}_f(t+dt)+\vec{p}_g(t+dt)-\vec{p}_f(t)}{dt} = m(t)\,\vec{g}$, d'où, en négligeant au numérateur le terme infiniment petit d'ordre 2 $-D_m dt dv$: $\boxed{\frac{m(t)v(t)-D_m dt v(t)+m(t)dv+D_m dt v(t)-D_m dt u-m(t)v(t)}{dt}\vec{u}_z = -m(t)g\vec{u}_z}$, puis en projetant selon Oz et en simplifiant : $\frac{+m(t)dv-D_m dt u}{dt} = -m(t)g$, ce qui donne bien $m\frac{dv}{dt} = D_m u - mg$.

❑ **3** – La force de poussée (que l'on devrait prendre en compte comme force supplémentaire si on ne se ramenait pas à un système fermé) est : $\vec{F} = D_m u\vec{u}_z$. On ne nous demande pas la force, mais son intensité, donc sa norme, qui est aussi sa composante selon $\vec{u}_z$, $\boxed{F = D_m u}$. Pour que la fusée puisse décoller, il faut que $\frac{dv}{dt} > 0$, donc $D_m u > mg$. La masse m de la fusée décroit au fil du temps, mais on souhaite que la fusée puisse décoller dès l'allumage du ou des moteurs, donc pour $m = m_0$. Il faut donc $\boxed{D_m u > m_0 g}$.

❑ **4** – I_s représente la durée pendant laquelle une masse m, donc égale à $D_m I_s$ peut fournir une poussée $D_m u$ égale à son poids $D_m I_s g$ au niveau du sol. $D_m u = D_m I_s g$ conduit à $\boxed{I_s = \frac{u}{g}}$.

❑ **5** – L'équation obtenue à la question 2 peut encore s'écrire : $\frac{dv}{dt} = \frac{D_m u}{m} - g = -\frac{u}{m}\frac{dm}{dt} - g$, d'où : $\frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln(m))}{dt} - g$, qui s'intègre en $v(t) = -u\ln(m) - gt + Cte$. Puisque la fusée décolle à l'instant $t = 0$, on a $v(0) = 0$, d'où $0 = -u\ln(m_0) + Cte$, puis $\boxed{v(t) = u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt}$.

❑ **6** – En dehors du champ de gravitation terrestre (et « loin » de tout autre centre attractif), l'équation différentielle de la question 2 devient $\frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln(m))}{dt}$, puis $dv = -u\,d(\ln(m))$. Il vient : $\int_{v_i}^{v_f} dv = -u\int_{m_i}^{m_f} d(\ln(m))$, puis $v_f - v_i = -u\ln\left(\frac{m_f}{m_i}\right)$, c'est-à-dire $\boxed{\Delta v = -u\ln\left(\frac{m_f}{m_i}\right)}$.

❑ **7** – Premier étage de la fusée à deux étages : $\boxed{\Delta v_{21} = -u\ln\left(\frac{34}{134}\right) = 5{,}49\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}$

Second étage de la fusée à deux étages : $\boxed{\Delta v_{22} = -u\ln\left(\frac{4}{24}\right) = 7{,}17\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

Accroissement total pour la fusée à deux étages : $\boxed{\Delta v_2 = -u\ln\left(\frac{34\times 4}{134\times 24}\right) = 12{,}7\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

Fusée à un seul étage : $\boxed{\Delta v_1 = -u\ln\left(\frac{14}{134}\right) = 9{,}04\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

❑ **8** – La relation obtenue à la question 6 peut encore s'écrire : $\frac{m_f}{m_i} = \exp\left(-\frac{\Delta v}{u}\right)$, avec ici $m_f = m_u$ et $m_i = m_u + m_c$. Il vient $1 + \frac{m_c}{m_u} = \exp\left(\frac{\Delta v}{u}\right)$, puis $\boxed{m_c = m_u\left[\exp\left(\frac{\Delta v}{u}\right) - 1\right]}$.

Numériquement, $u = u_1 = 4{,}00\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$ conduit à $\boxed{m_{c1} = 1{,}25\cdot 10^3\mathrm{kg}}$.

Et $u = u_2 = 20{,}0\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$ conduit à $\boxed{m_{c2} = 142\ \mathrm{kg}}$. On a en effet intérêt à obtenir une grande vitesse d'éjection pour diminuer la masse de carburant.

I.B. – Aspect énergétique – Rendement propulsif du moteur de la fusée

❑ **9** – On notera plutôt δm la petite quantité de masse de gaz éjectée pendant dt, puisqu'il ne s'agit pas d'une petite variation d'une grandeur m (mais de son opposé). Son énergie cinétique dans le référentiel d'étude, dans lequel le vaisseau est animé d'une vitesse de norme v, et les gaz éjectés, d'une vitesse de norme $|u - v|$ est : $\boxed{\delta E_c = \frac{1}{2}\delta m(u - v)^2}$.

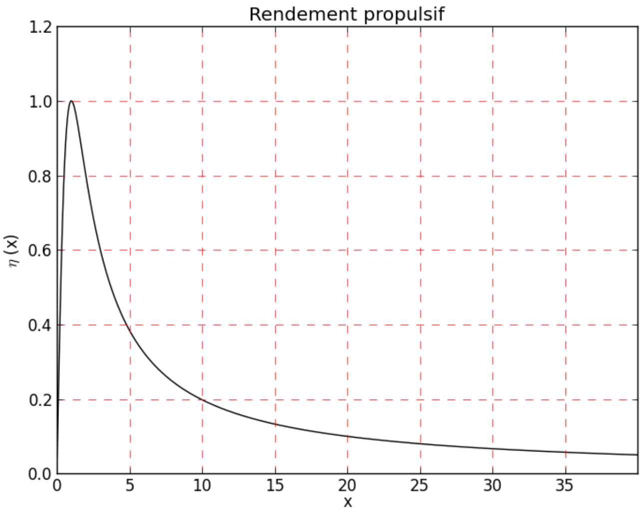
On en déduit la puissance cinétique du jet : $\boxed{P_{jet} = \frac{\delta E_c}{dt} = \frac{1}{2}D_m(u - v)^2}$.

Toujours dans le même référentiel, la puissance reçue par le vaisseau de la part de la force de poussée est : $\boxed{P_{poussée} = D_m u\, v}$.

❑ **10** – Effectuons plutôt une étude énergétique : entre t et $t + dt$, la masse $m(t + dt)$ qui reste dans le vaisseau à $t + dt$ a gagné une énergie cinétique cinétique (à l'ordre 1 en dt) : $\frac{1}{2}m(t)\,d(v^2)$, soit $mv\frac{dv}{dt}dt$. Et, d'après la question 2, on peut écrire, en dehors de l'attraction par un astre, $m\frac{dv}{dt} = D_m u$. Le gain du vaisseau en énergie cinétique pendant dt est donc $D_m uv\,dt$. Pendant la même durée, une énergie cinétique $\frac{1}{2}D_m\,dt\,(u - v)^2$ est fournie au jet. Le rendement propulsif du moteur est alors : $\eta = \frac{D_m uv\,dt}{D_m uv\,dt + \frac{1}{2}D_m\,dt\,(u-v)^2} = \frac{2uv}{2uv + u^2 + v^2 - 2uv} = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$. On peut alors aussi bien poser $x = \frac{v}{u}$ que $x = \frac{u}{v}$. Prenons par exemple $\boxed{x = \frac{v}{u}}$. On a bien, après division par v^2, l'expression de l'énoncé : $\eta(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

❑ **11** – Le programme python ci-dessous permet d'obtenir le tracé ci-contre.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.arange(0,40,0.01)
def eta(x):
   f=2*x/(1+x**2)
   return f
plt.plot(x,eta(x),color='k')
plt.grid(b=True,color='r',linestyle='--')
plt.xticks(np.arange(0,40,5))
plt.yticks(np.arange(0,1.4,0.2))
plt.title("Rendement propulsif")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("$\eta$ (x)")
plt.show()
```



La dérivée par rapport à x du rendement est $\eta'(x) = \frac{(1+x^2)\times 2-2x\times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$. Elle s'annule uniquement pour $x = 1$, puisque x est positif ou nul. Le rendement maximum est donc obtenu pour $x = 1$.

Le rendement s'annule pour $x = 0$; en effet, si le vaisseau est immobile, toute l'énergie part dans le jet.
Le rendement s'annule pour $x \to \infty$; en effet, si les gaz sont éjectés à vitesse nulle, il n'y a pas de propulsion.

II.−Limites de la propulsion chimique

❑ **12** – Question mal formulée. Pour commencer, il y a confusion entre grandeurs finies et grandeurs infinitésimales. Pourquoi noter Q, W, W' des grandeurs énergétiques échangées pendant une durée dt ?? Et un dessin aurait été le bienvenu : où sont les sections S_1, S_2, S_1', S_2' ? Et le mot « échangé » est trop vague : il n'oriente pas l'échange. En outre, il semblerait que, pour définir W', il y ait eu une confusion entre « travail sans mettre en jeu les forces de pression » et « travail autre que ceux de transvasement ». Enfin, pourquoi demander de relier des énergies à des énergies massiques … ?
En fait, ce qu'on demande ici est simplement une démonstration du « premier principe industriel »
En appelant Σ_1 le système situé à t entre S_1 et S_1', Σ_2 celui situé à $t + dt$ entre S_2 et S_2', $\Sigma_0$le système situé entre S_1' et S_2, on raisonne sur le système fermé Σ^* correspondant, à t à $\Sigma_1 \cup \Sigma_0$ et, à $t + dt$, à $\Sigma_0 \cup \Sigma_2$.
En notant dEc^*, dEp^* et dU^* les variations de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie interne de ce système ; et en notant δV_1 le volume de Σ_1 et δV_2 celui de Σ_2, le premier principe appliqué à Σ^* donne : $dE_c^* + dE_p^* + dU^* = \delta W' + P_{ext1}\delta V_1 - P_{ext2}\delta V_2 + \delta Q$.
En régime « permanent » ou plutôt « stationnaire », Σ_0 a des énergies cinétique, potentielle et interne identiques à t et à $t + dt$. L'équation ci-dessus s'écrit donc encore :
$E_c(\Sigma_2) - E_c(\Sigma_1) + E_p(\Sigma_2) - E_p(\Sigma_1) + U(\Sigma_2) - U(\Sigma_1) = \delta W' + P_{ext1}\delta V_1 - P_{ext2}\delta V_2 + \delta Q$,
Ou encore $E_c(\Sigma_2) - E_c(\Sigma_1) + E_p(\Sigma_2) - E_p(\Sigma_1) + H(\Sigma_2) - H(\Sigma_1) = \delta W' + \delta Q$
Notons δm_1 la masse de Σ_1 et δm_2 celle de Σ_2. En régime « permanent » ou plutôt « stationnaire », on a $\delta m_1 = \delta m_2$ et on notera cette masse élémentaire commune δm. La relation précédente devient, en introduisant les énergies massiques :

$$\boxed{\delta m\left[\left(e_{c2} + e_{p2} + h_2\right) - \left(e_{c1} + e_{p1} + h_1\right)\right] = \delta W' + \delta Q}.$$

NB : $\delta W'$ représente ce que l'on appelle souvent le « travail utile ».

❑ **13** – On a ici $\delta W' = 0$ et $\delta Q = 0$, d'où $e_c + e_p + h = Cte$. On peut supposer ici que les variations d'énergie potentielle sont négligeables. Finalement, avec le modèle du gaz parfait,

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}T = Cte.$$

En égalisant entre la chambre de combustion et la sortie de la tuyère, $0 + \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}T_c = \frac{1}{2}u_{max}^2 + 0$, ce qui donne : $\boxed{u_{max} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_c}{(\gamma-1)M}}}$.

❑ **14** – Numériquement, $\boxed{u_{max} = 3{,}11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$. $\boxed{I_s = \frac{u_{max}}{g} = 317 \text{ s}}$.

En effet, la masse molaire est celle de l'eau, ou bien de $H_2 + \frac{1}{2}O_2$.

III.−Le moteur à plasma micro-ondes

III.A. Principe de fonctionnement

❑ **15** – Un électron libre est soumis à son poids $\boxed{m_e\,\vec{g}}$, à la force de Lorentz (partie électrique et partie magnétique) : $\boxed{-e(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})}$. On peut $\boxed{\text{négliger le poids et la force magnétique}}$ devant la force électrique.

❑ **16** – En appliquant la Relation Fondamentale de la Dynamique à un électron (assimilé à un point matériel) dans le référentiel du réacteur, supposé galiléen, on a, en notation complexe (on admet, dans le cadre du programme, que pour des électrons non relativistes, le champ d'accélération se résume à la dérivée temporelle du champ des vitesses) :

$m_e \frac{\partial \underline{\vec{v}_e}}{\partial t} = -e\,\underline{\vec{E}}$, d'où $\boxed{\underline{\vec{v}_e} = -\frac{e}{i m_e \omega}\underline{\vec{E}}}$, puis $\underline{\vec{j}} = -ne\underline{\vec{v}_e} = \frac{ne^2}{i m_e \omega}\underline{\vec{E}}$. La conductivité complexe est $\boxed{\underline{\sigma} = \frac{-ine^2}{m_e \omega}}$.

❑ **17** – On a ici $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\,\vec{u}_x$. La divergence du champ électrique est donc : $div\,\underline{\vec{E}} = -i\underline{k}\,\vec{u}_x \cdot \underline{\vec{E}} = -i\underline{k}\,\vec{u}_x \cdot E_0 e^{i(\omega t - kx)}\vec{u}_y$, $\boxed{\text{ce qui donne 0}}$, puisque $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = 0$. Or, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit $div\,\underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$; on a donc bien $\rho = 0$.

Les équations de Maxwell dans le plasma s'écrivent, en notation réelle : $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $div\,\vec{E} = 0$, $div\,\vec{B} = 0$, et $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Or, on a $m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e\vec{E}$, et $\vec{j} = -ne\vec{v}_e$, donc $\frac{\partial\,\vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e}\vec{E}$.

En prenant le rotationnel du rotationnel du champ électrique, on obtient, compte tenu de l'équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{grad}(div\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\,\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$. On en déduit :

$-\Delta\vec{E} = -\left(\mu_0 \frac{ne^2}{m_e}\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\right)$, soit encore : $\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{ne^2}{m_e}\vec{E}}$.

Pour obtenir la relation de dispersion, on repasse en notation complexe, et on remplace $\underline{\vec{E}}$ par $E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\vec{u}_y$, $\underline{k}$ étant *a priori* complexe. Il vient : $\left(-\underline{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{\vec{E}} = \mu_0\frac{ne^2}{m_e}\underline{\vec{E}} = \frac{\omega_p^2}{c^2}\underline{\vec{E}}$. En rejetant la solution triviale et sans intérêt du champ électrique identiquement nul, il vient : $\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$.

❑ **18** – Une onde ne peut se propager que si son nombre d'onde $\underline{k}$ a une partie réelle non nulle. Son carré ne doit donc pas être négatif. Il vient $\boxed{\omega > \omega_p}$. $\boxed{\text{Dans le cas contraire, l'onde est évanescente}}$.

❑ **19** – En ne prenant en compte que le champ magnétique statique, et en travaillant ici avec la vitesse de l'électron étudié (et non un champ des vitesses), on a : $\boxed{m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\,\vec{v}_e \wedge \vec{B}_0}$.

La question qui vient est hors-programme. Celui-ci dit en effet (première année, aussi bien MPSI que PCSI) : « Déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire ». Et ici, on nous demande de montrer que la trajectoire est circulaire…

Puisque la vitesse initiale de l'électron est orthogonale au champ magnétique, elle est parallèle au plan xOy. Et puisque $\frac{d\vec{v}_e}{dt}$ est aussi orthogonal au champ magnétique (à cause du produit vectoriel), la vitesse reste toujours dans le même plan, parallèle à xOy.

La démonstration du caractère circulaire de la trajectoire pourrait se faire ainsi :

on pose $\vec{v}_e = v_{ex}\,\vec{u}_x + v_{ey}\,\vec{u}_y$.

L'équation différentielle vectorielle ci-dessus conduit à : $\begin{cases} \frac{dv_{ex}}{dt} = -\frac{eB_0}{m_e} v_{ey} \\ \frac{dv_{ey}}{dt} = \frac{eB_0}{m_e} v_{ex} \end{cases}$. On passe en notation complexe (pas la même que dans les questions précédentes) en posant $\underline{v}_e = v_{ex} + i v_{ey}$. Le système d'équations différentielles devient : $\frac{d\underline{v}_e}{dt} = i\frac{eB_0}{m_e}\underline{v}_e$, qui s'intègre en $\underline{v}_e(t) = \underline{v}_{em} e^{i\frac{eB_0}{m_e}t} = v_{em} e^{i\varphi} e^{i\frac{eB_0}{m_e}t}$. On pose, pour alléger, $\boxed{\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}}$. On a donc $\underline{v}_e(t) = v_{em} e^{i(\omega_c t + \varphi)}$. En prenant la partie réelle et la partie imaginaire, on retrouve les composantes en x et en y de la vitesse : $\begin{cases} v_{ex} = v_{em}\cos(\omega_c t + \varphi) \\ v_{ey} = v_{em}\sin(\omega_c t + \varphi) \end{cases}$, et si on intègre une nouvelle fois : $\begin{cases} x_e = \frac{v_{em}}{\omega_c}\sin(\omega_c t + \varphi) + x_{ec} \\ y_e = -\frac{v_{em}}{\omega_c}\cos(\omega_c t + \varphi) + y_{ec} \end{cases}$. On a alors $(x_e(t) - x_{ec})^2 + (y_e(t) - y_{ec})^2 = Cte$, ce qui est bien l'équation d'un cercle. Il est parcouru à la vitesse angulaire ω_c.

Numériquement, $\boxed{\omega_c = 3{,}51 \cdot 10^{10} \mathrm{rad \cdot s^{-1}}}$.

❑ **20** – Qualitativement, si le champ électrique micro-onde a pour pulsation ω_c, ce champ électrique pourra être opposé au vecteur vitesse des électrons à chaque demi-tour, et pourra ainsi les accélérer. Mais il faut un bon synchronisme …

❑ **21** – On a vu que l'on ne pouvait propager des ondes que pour $\omega > \omega_p$; il faut donc $\omega_c > \omega_p$, d'où $\boxed{n < \frac{\epsilon_0 B_0^2}{m_e}}$. $\boxed{n < 3{,}89 \cdot 10^{17} \mathrm{m^{-3}}}$

❑ **22** – Le relation d'Einstein-Planck donne l'énergie d'un photon $E = h\nu$. À la pulsation cyclotron, l'énergie d'un photon est donc $\boxed{\frac{h\omega_c}{2\pi} = 2{,}31 \cdot 10^{-5} \mathrm{eV}}$. Cela est donc $\boxed{\text{insuffisant}}$ pour la photo-dissociation.

III.B. Poussée

❑ **23** – La charge δq correspondant aux ions traversant le moteur pendant dt est, d'une part $\delta q = I dt$, et d'autre part $\delta q = \frac{D_m dt\, e}{\mu}$. Il vient : $\boxed{I = \frac{D_m\, e}{\mu}}$.

❑ **24** – On applique le théorème de l'énergie cinétique à un ion, dans le référentiel du moteur, supposé galiléen : $\frac{1}{2}\mu(u^2 - 0) = e\,V_a$, d'où $\boxed{u = \sqrt{\frac{2eV_a}{\mu}}}$.

On en déduit la norme de la force de poussée : $F = D_m u = D_m\sqrt{\frac{2eV_a}{\mu}} = \boxed{I\sqrt{\frac{2\mu V_a}{e}}}$.

❑ **25** – On remplace, dans l'expression précédente, I par $\frac{j\pi D^2}{4}$, et on prend pour j l'expression donnée (loi de Child-Langmuir) : $F = \frac{4\epsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{\mu}}\frac{V_a^{\frac{3}{2}}}{d^2}\frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{2\mu V_a}{e}}$, d'où $\boxed{F = \frac{2\pi\epsilon_0}{9}\frac{D^2}{d^2}V_a^2}$.

❑ **26** – Numériquement, en n'oubliant pas de multiplier par N, $\boxed{F = N\frac{2\pi\epsilon_0}{9}\frac{D^2}{d^2}V_a^2 = 4{,}26 \cdot 10^{-3} N}$; ce n'est pas beaucoup, mais on verra plus loin que ça suffit pour maintenir un satellite en orbite.

La vitesse de sortie est $\boxed{\text{u}= \sqrt{\frac{2eV_aN_A}{M}} = 32{,}1\ \text{km.s}^{-1}}$.

La masse de Xénon consommée pendant une durée dt est $\delta m_{Xe} = D_m dt = \frac{F}{u}dt$. Si la force de poussée et la vitesse d'éjection sont constantes au cours du temps, il vient $\boxed{m_{Xe} = \frac{F}{u}\Delta t = 1{,}03\ \text{kg}}$.

On nous demande ensuite la « puissance cinétique totale transmise au jet de gaz propulsé ». Il manque une information importante : dans quel référentiel ? Dans celui du moteur, $\boxed{P_{jet} = \frac{1}{2}D_m u^2 = \frac{Fu}{2} = 68{,}4\ \text{W}}$.

❑ **27** – Si on ne fournissait pas un jet d'électrons pour neutraliser le jet d'ions, le moteur se chargerait négativement, et $\boxed{\text{il apparaitrait un champ électrique supplémentaire}}$ qui empêcherait les ions de sortir du moteur, ou en tout cas les freinerait de plus en plus.

IV.—Application du moteur ionique au maintien d'un satellite en orbite basse

❑ **28** – En appliquant le principe fondamental de la dynamique, dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen) au satellite, considéré comme un point matériel, et en projetant sur l'axe Terre-satellite, $\frac{m_s v^2}{r} = \frac{Gm_sM_t}{r^2}$, d'où $E_c = \frac{1}{2}m_s v^2 = \frac{Gm_sM_t}{2r}$. Le paramètre r représente la distance entre le centre de masse de la Terre et celui du satellite : $r = R_t + h$.

Or, l'énergie potentielle du satellite est $E_p = -\frac{Gm_sM_t}{r}$.

On en déduit l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p = -\frac{Gm_sM_t}{2r}$, puis la relation : $\boxed{E_c = -E_m}$.

Un freinage entraîne une $\boxed{\text{diminution de l'énergie mécanique}}$ (déperdition d'énergie par frottements), donc une augmentation de l'énergie cinétique (mais une baisse de l'énergie potentielle), ce qui se traduit bien par une augmentation de la vitesse.

❑ **29** – La variation d'altitude étant petite, on peut effectuer un calcul différentiel :
$\frac{dE_m}{dh} = \frac{d}{dh}\left(-\frac{Gm_sM_t}{2(R_t+h)}\right) = -\frac{Gm_sM_t}{2}\frac{d}{dh}\left(\frac{1}{R_t+h}\right) = \frac{Gm_sM_t}{2(R_t+h)^2}$, d'où $dE_m = \frac{Gm_sM_t}{2(R_t+h)^2}dh$. Ainsi, quand l'altitude passe de h à $h - \Delta h$, l'énergie mécanique subit une variation : $\boxed{\Delta E_m = -\frac{Gm_sM_t}{2(R_t+h)^2}\Delta h = -22{,}4\ \text{kJ}}$.

❑ **30** – La puissance que doit fournir le moteur correspond à $\left|\frac{\Delta E_m}{T}\right|$, où T représente la période de révolution du satellite autour de la Terre.

Elle est donnée par $2\pi(R_t + h) = vT$, d'où $T = 2\pi(R_t + h)\sqrt{\frac{R_t+h}{GM_t}}$. Numériquement, $\left|\frac{\Delta E_m}{T}\right| = 4{,}13$ W.

La puissance motrice fournie par le propulseur ionique est $\boxed{Fv = F\sqrt{\frac{GM_t}{R_t+h}} = 32{,}9\ \text{W}}$. Cela semble en effet suffisant.