Le Millenium Bridge

Mines 2016 PSI - 1

I. — Oscillateur simple

❑ 1 – La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse donne : $m\vec{a} = \vec{F}_f + m\vec{g} - k(x - \ell_0)\,\hat{u}_x$ qui, projeté sur l'axe Ox, donne $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x - \ell_0)$. À l'équilibre $0 = -mg - k(\tilde{x} - \ell_0)$. En soustrayant les deux équations précédentes et en posant $X = x - \tilde{x}$, on obtient $\ddot{X} = -\dfrac{\alpha}{m}\dot{X} - \dfrac{k}{m}X$. On a donc $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ qui est la pulsation propre (pulsation du régime libre sans amortissement), $\xi = \dfrac{\alpha}{2\sqrt{km}}$ qui est le facteur d'amortissement, sans dimension, et $\tilde{x} = \ell_0 - \dfrac{mg}{k}$ position d'équilibre.

❑ 2 – L'équation caractéristique $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ est de discriminant réduit $\Delta' = \xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2 < 0$, les solutions sont donc de type $X(t) = A\cos\left(\omega t + \phi\right)\exp\left(-\xi\omega_0 t\right)$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. Avec les conditions initiales données, on obtient : $X(t) = X_0\cos(\omega t) + \dfrac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega_0}\sin(\omega t)\exp(-\xi\omega_0 t)$.

Pour $\xi = 0$, $X(t) = X_0\cos(\omega t) + \dfrac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega t)$.

Avec une force $\vec{F}_v = \beta\dot{x}\hat{u}_x$, cela revient à remplacer α par $\alpha - \beta$. Le terme d'ordre 1 peut devenir négatif ce qui engendre une instabilité : solution avec exponentielle divergente au lieu de sinusoïdale amortie : à l'aide de « $x^2 - Sx + P = 0$ », on voit que l'on a un produit positif, donc racine de même signe ou norme des deux racines conjuguées et une somme positive, donc deux racines positives ou complexes à partie réelle positive.

❑ 3 – Le principe fondamental de la dynamique projeté sur Ox devient

$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x - \ell_0) - F_0 - F_1\cos(2\pi f t)$, soit $\ddot{X} = -\xi\omega_0\dot{X} - \omega_0^2 X - \dfrac{F_0}{m} - \dfrac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$,

soit encore en prenant comme variable Y : $\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\dfrac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$.

Réécrit en complexe, on obtient $\underline{Y}\left(-\omega^2 + 2\mathrm{j}\omega\xi\omega_0 + \omega_0^2\right) = -\underline{E}$.

$$\underline{H} = -\frac{1}{\omega_0^2}\frac{1}{1 + 2\mathrm{j}\xi\Omega - \Omega^2}$$

❑ 4 – On a affaire à un passe-bas qui pourra présenter un phénomène de résonance si la norme de $\underline{H}$ présente un maximum, ce qui est le cas si la norme au carré du dénominateur présente un minimum. On pose $z(\Omega) = \left|\dfrac{1}{\omega_0^2\underline{H}}\right|^2 = \left(1 - \Omega^2\right)^2 + (2\xi\Omega)^2$.

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\Omega} = -2\left(1 - \Omega^2\right)2\Omega + 8\xi^2\Omega$ qui s'annule (en dehors de 0, minimum ou maximum attendu d'un passe-bas), si $\xi < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, pour $\Omega_r = \sqrt{1-2\xi^2}$. Pour $\xi^2 \ll 1$, on a $\omega_r \approx \omega_0$, au deuxième ordre près en ξ, et $|H(\omega_r)| \approx \dfrac{1}{\omega_0^2}\dfrac{1}{2\xi}$.

❑ 5 – L'asymptote horizontale à basse fréquence est à 0 dB, le maximum se situe à $\omega = 12\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ soit $f = 1{,}9\,\mathrm{Hz}$ et vaut 9 dB soit $\omega_0^2\,|\underline{H}|_{\max} = 10^{9/20} = 2{,}8$ et $\xi \approx \dfrac{1}{2\left(\omega_0^2 H_{\max}\right)} = 0{,}18$.

❑ 6 – On a vu dans la question 4 que le déplacement de le structure devenait important au niveau de la fréquence de résonance (cf. l'introduction). Il faut éviter ce phénomène d'autant plus que cela peut aller jusqu'à la destruction.

❑ 7 – On peut envisager un accéléromètre fixé au niveau de la hanche pour éviter les rotations et faire ensuite $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$. Un capteur de force par extensométrie fixé au tablier pose problème car le piéton se déplace, problème que l'on peut résoudre à l'aide d'un tapis roulant. On peut également envisager une prise de vue video avec des marqueurs.

❑ 8 – La fréquence maximale des spectres correspond à la moitié de la fréquence d'échantillonnage noté f_e.

D'après le graphe 4, de fréquence d'échantillonnage la plus grande, $f_e = 300/(10-1) = 33{,}3\,\mathrm{Hz}$, donc sans problème de repliement jusqu'à $f_e/2 = 16{,}7\,\mathrm{Hz}$, la fréquence de la force verticale due à la marche est de 2 Hz avec présence d'harmoniques 4, 8, 10 et 12.

Pour le graphe 3, de $f_e = 300/89 = 3{,}37\,\mathrm{Hz}$, on a repliement du fondamental à $3{,}37 - 2 = 1{,}37 \approx 1{,}4\,\mathrm{Hz}$ et du deuxième harmonique à $|3{,}37-4| = 0{,}63\,\mathrm{Hz}$.

Pour le graphe 2, de $f_e = 300/26 = 11{,}5\,\mathrm{Hz}$, on observe le fondamental, le deuxième harmonique et le repliement du quatrième harmonique à $11{,}5-8 = 3{,}5 \approx 3{,}2\,\mathrm{Hz}$.

Pour le graphe 1, de $f_e = 300/179 = 1{,}7\,\mathrm{Hz}$, on observe le repliement du fondamental à $|1{,}7-2| = 0{,}3\,\mathrm{Hz}$.

La fréquence de la marche est de l'ordre de 1 Hz, les deux pieds jouant un rôle symétrique, la fréquence de la force verticale est le double.

❑ 9 – La fréquence de résonance du pont correspond à la fréquence de la marche !

Le système d'« amortisseur » n'a pas amorti grand chose (-2 dB), mais a par contre dédoublé la résonance en créant une anti résonance pour la fréquence de la marche (-8 dB cette fois). L'explication vient donc du couplage des deux oscillateurs, hors programme.

II. — Système élastique continu

❑ 10 – $[E] = \dfrac{[F][L]}{[S][\Delta L]} = \dfrac{[F]}{[S]}$, donc le module d'Young est homogène à une pression, et a comme unité le pascal, de symbole Pa.

❑ 11 – L'allongement vaut $X(x+\mathrm{d}x,t) - X(x,t) = \dfrac{\partial X}{\partial x}\mathrm{d}x$, soit une variation relative $\dfrac{\partial X}{\partial x}$. La force, d'après la loi de Hooke, vaut donc $ES\dfrac{\partial X}{\partial x}$; l'orientation étant imposée par l'axe des x, cette force est une force de traction du côté $x+\mathrm{d}x$.

Le solide est soumis à deux forces l'une en x (gauche/droite) et l'autre en $x+\mathrm{d}x$ (droite/gauche), la résultante vaut $ES\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)_{x+\mathrm{d}x} - ES\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)_x = ES\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2}\mathrm{d}x$. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, on obtient $\rho S \mathrm{d}x \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} \mathrm{d}x$, soit $\dfrac{\rho}{E}\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0$, i.e. une équation de d'Alembert de célérité $\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

❏ 12 – On applique le théorème du centre d'inertie au petit élément de longueur $\mathrm{d}\ell$ et de masse élémentaire $\mathrm{d}m = \mu \mathrm{d}\ell = \mu\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \approx \mu \mathrm{d}x$:

$\mu \mathrm{d}\ell \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y = \mu \mathrm{d}s \vec{g} + \vec{T}(x+\mathrm{d}x, t) - \vec{T}(x,t) = \mu d\ell \vec{g} + \dfrac{\partial \vec{T}}{\partial x}\mathrm{d}x$

et, en remarquant **que l'on néglige le poids** dans la suite de l'analyse, on obtient donc :

$$\mu \mathrm{d}\ell \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x}\mathrm{d}x.$$

On voit que la projection sur l'axe horizontal donne $T_x(x,t) = T_x(x+dx,t) \approx T_0$ ou bien, comme dans l'équation précédente $\dfrac{\partial T_x}{\partial x} = 0$.

La projection suivant y donne $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial T_y}{\partial x} \approx \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial T_y}{\partial x}$.

On a supposé que le déplacement latéral $y(x,t)$ était faible, donc l'angle α que fait la tangente à la corde avec l'horizontale est faible lui aussi : $\tan\alpha = \dfrac{T_y}{T_x} = \dfrac{\partial y}{\partial x} \approx \dfrac{T_y}{T_0} \approx \alpha \ll 1$.

On a donc $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial T_y}{\partial x} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T_x \dfrac{\partial y}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T_0\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) = \dfrac{T_0}{\mu}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

❏ 13 – On reconnait dans l'équation de d'Alembert de la question précédente la célérité de l'onde : $c_\ell = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$.

III. — Modèle de la poutre élancée

❏ 14 – Il s'agit d'ondes stationnaires. Les solutions de ce type correspondent à des systèmes finis avec des conditions aux limites de type grandeur constante (nulle le plus souvent).

❏ 15 – $\rho S \ddot{\mathrm{g}}\mathrm{f} + IE\mathrm{g}\mathrm{f}^{iv} = 0$ soit, sans précaution mathématique, $\dfrac{\rho S}{IE}\dfrac{\ddot{\mathrm{g}}}{\mathrm{g}} = -\dfrac{\mathrm{f}^{iv}}{\mathrm{f}} = C^{te}$ puisque les deux variables x et t sont indépendantes. Si la constante est négative, l'équation en g est celle d'un oscillateur harmonique. Le fait que la constante soit négative apparaît dans la question suivante !

L'équation en f est d'ordre 4, il y a donc quatre constantes d'intégration à déterminer. L'équation en g est d'ordre 2, il y a donc deux autres constantes d'intégration à déterminer. y s'obtenant comme un produit, on peut regrouper deux constantes multiplicatives, il y a donc cinq constantes à déterminer, tout ceci pour UN mode (c'est que veut dire « correspondant à la situation étudiée » ?).

❏ 16 – L'équation caractéristique s'écrit $r^4 = -C^{te}$. Si la constante est négative, on peut poser $r^4 = \gamma^2$ et supposer sans perte de généralités que $\gamma > 0$. On a donc $r^2 = \pm\gamma$ et $r = \pm\sqrt{\gamma}$ et $r = \pm \mathrm{j}\sqrt{\gamma}$. En posant $\sqrt{\gamma} = \beta$, on a bien quatre solutions exponentielles $\exp(\beta x)$, $\exp(-\beta x)$, $\exp(\mathrm{j}\beta x)$ et $\exp(\mathrm{j}\beta x)$ qui, combinées conduisent bien à la somme proposée. En reportant dans l'équation obtenue en 15, on a $\beta = \left(\dfrac{\rho S}{IE}\right)^{1/4}\sqrt{\omega}$.

Si la constante est positive, on peut poser $r^4 = -\gamma^2$, soit $r = \pm\dfrac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\beta$ et $r = \pm\dfrac{1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\beta$; tous les termes possèdent des parties exponentielles ce qui, avec des valeurs aux limites nulles, conduit à la seule solution f=0. La constante est bien négative.

❑ 17 – Les quatre équations aux limites donnent :

$y(x=0)=0$, $A+C=0$; $\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0$, $\beta^2(A-C)=0$; soit $A=C=0$.

$y(x=L)=0$, $B\sin(\beta L)+D\sinh(\beta L)=0$; $\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=L} = 0$, $\beta^2\left(B\sin(\beta L)-D\sinh(\beta L)\right)=0$, système de Cramer qui donne une solution non nulle si le déterminant est nul : $2\sin(\beta L)\sinh(\beta L)=0$ soit $\beta_n L = n\pi$. Et donc $\omega_n = \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\dfrac{IE}{\rho S}}$

❑ 18 – On doit avoir aux extrémités une ligne horizontale ce qui est toujours le cas, et donc un noeud aux extrémités. La dérivée seconde nulle aux extrémités est également vérifiée dans tous les cas. On détermine n en comptant les ventres. Les cas qui ne correspondent pas à l'étude sont ceux de la déformation à deux dimensions de la plaque $y=f(x,z)$.

figure	a	b	c	d	e	f	g	h
n	1		2		3	4		
étude	Oui	Non	Oui	Non	Oui	Oui	Non	Non

❑ 19 – Les fréquences des modes sont en Hz, les longueurs de travée en m.

longueur	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
70	0,50	2,0	4,5	8
144	0,12	0,47	1,06	1,9
108	0,21	0,84	1,9	3,4

Il y a donc résonance possible (fréquence proche de 2 Hz) pour le mode 2,3 ou 4 selon la travée.

Dans le cadre d'une vibration latérale, on intervertit le rôle de b et h.

longueur	$n=1$	$n=2$
70	1,9	7,5
144	0,44	1,76
108	0,79	3,1

La vibration latérale suppose un excitation latérale, alternance droite gauche de la marche, donc à 1 Hz. Ce qui correspond à peu près à la fréquence due au premier mode de la travée de 108 m pour la vibration latérale, c'est ce mode qui a posé problème.