MINES – PONTS PSI 2017

PHYSIQUE 1

Corrigé rédigé par Alain Favier alain.favier@ac-grenoble.fr ; relu et annoté par Régine Noël. Merci de nous faire part de vos remarques et critiques. Ce document peut être donné tel quel ou modifié à vos étudiants.

I. GENERALITES SUR LES MEMRISTORS

1. q = Cu [1] ; u = Ri [2] ; ϕ = Li [3]
   C [F] ; R [Ω] ; L [H].

2. $i = \frac{dq}{dt}$.
   Considérons une surface Σ s'appuyant sur un contour orienté Γ. L'intégration de l'équation de MF sur la surface Σ, l'application du théorème de Stokes et la commutation des opérateurs spatiaux et temporels permet d'écrire la fem d'induction en convention générateur : e = - $\frac{d\phi}{dt}$ et en convention récepteur (cf. texte) u = + $\frac{d\phi}{dt}$.
   R : le composant étudié correspond-t-il à un circuit fermé comme l'exige la démonstration ci-dessus ?

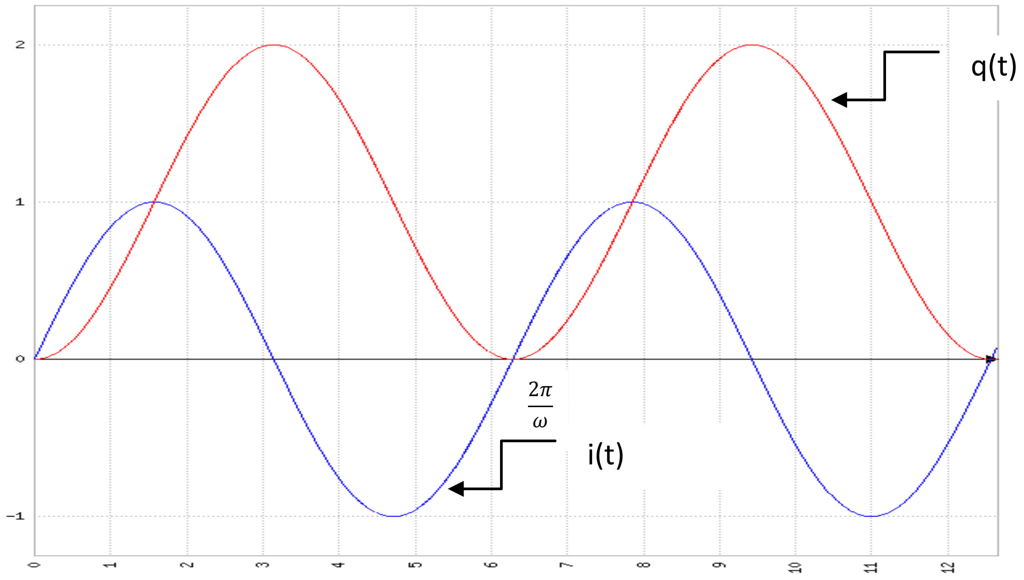
3. En différentiant les expressions de 1. et en reprenant celles de 2. :
   [1] dq = Cdu ; [2] du = Rdi ; [3] dϕ = Ldi ; [4] dq = idt ; [5] dϕ = udt.

4. Par définition M(q) est égal à $\frac{\phi}{q}$, soit d'après ce qui précède M(q) = $\frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{dq}{dt}}$ donc
   M(q) = u/i ; M(q) s'exprime donc en Ω.

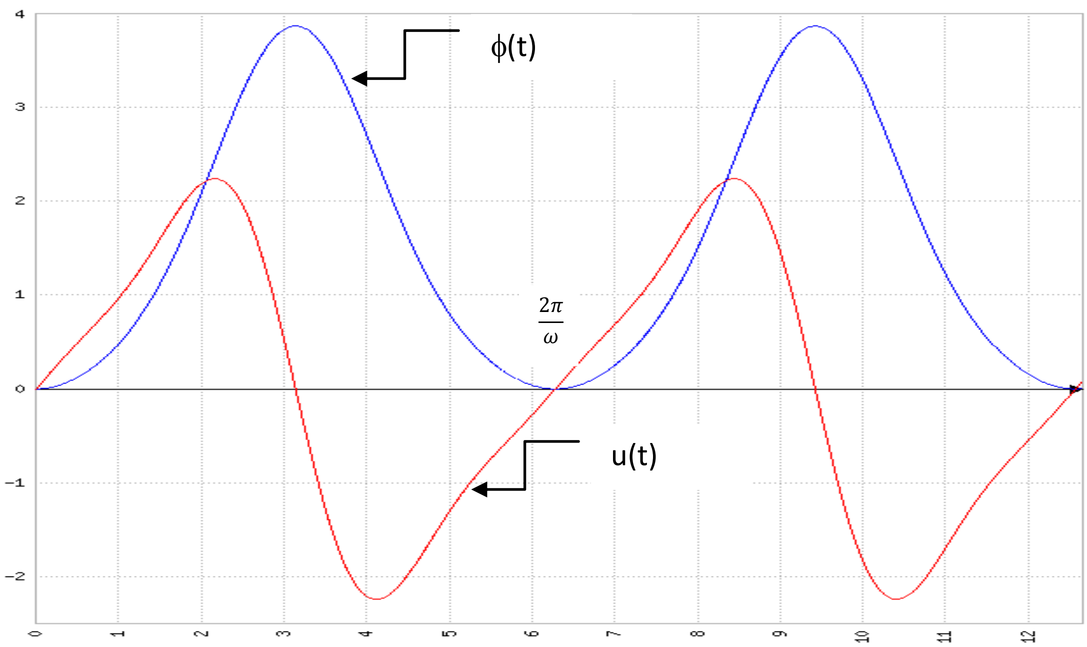
5. D'après la question précédente, pour un memristor, **M(q) = $\frac{u}{i}$**, relation semblable à la relation u = Ri pour un résistor ; les associations de memristors vont obéir aux mêmes lois que celles des résistors : M = $\sum_i M_i$ en série et M = $\sum_i \frac{1}{M_i}$ en parallèle.

6. En utilisant dq(t) = i(t) dt,
   - t < 0 : dq(t) = 0 soit q(t) = cte, nulle car q(0) = 0 (en 0^+ ou 0^-) par continuité de la charge.
   - t > 0 : q(t) = $\frac{i_0}{\omega}$ (1 - cos(ωt)), avec la même condition en t = 0.

D’où les tracés (en unités arbitraires) :

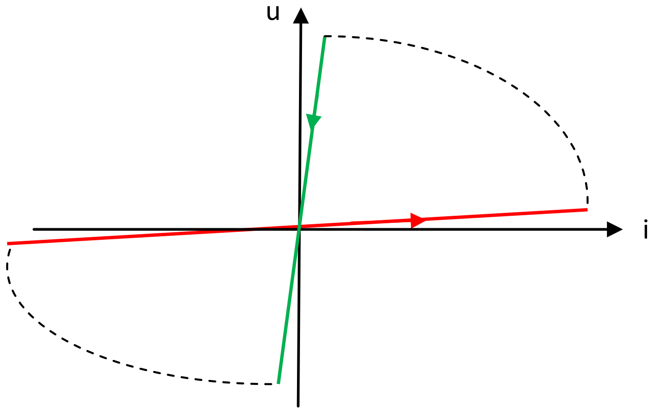


7. u est la dérivée de ϕ par rapport au temps, donc u est positive quand ϕ croît et négative quand ϕ décroît ; elle est donc nulle en $\frac{\pi}{\omega}$ et $\frac{2\pi}{\omega}$ et maximale aux points d’inflexion de ϕ en $\frac{\pi}{2\omega}$ et $\frac{3\pi}{2\omega}$. D’où le tracé (toujours en unités arbitraires) :



8. Si l’on ne s’intéresse qu’aux parties quasi linéaires de la courbe proposée et en « exagérant », on observe deux régimes de fonctionnement :
   - Le sens de i croissant correspond à une résistance « faible » et le courant est susceptible de circuler dans le memristor (en rouge ci-dessous),
   - le sens de i décroissant correspond à une résistance « forte » et le courant ne passe plus (en vert ci-dessous) :

R : les pointillés correspondent au passage entre les deux régimes (voir la figure 7. et la fin du corrigé pour des précisions).



9. Le phénomène évoqué est un phénomène d'hystérésis : l'état du système dépend de son « histoire » (ici du sens de parcours du cycle, donc de la croissance ou décroissance de i).
   Dans le programme de la filière PSI on peut citer les comparateurs électroniques à hystérésis et le phénomène d'hystérésis magnétique pour les matériaux ferromagnétiques.
   Il existe beaucoup d'autres exemples : hystérésis mécanique lors de contraintes en traction et en compression, hystérésis des matériaux ferroélectriques, etc.

   Chaque fois qu'un système présente deux comportements différents suivant son histoire, il peut être considéré comme un système à deux états représentant chacun un 0 ou un 1 ; il permet donc de stocker de l'information numérique…

10. Et ce d'autant qu'il est « non volatile memory » : lorsque le memristor n'est plus alimenté sa tension et son intensité sont nulles (composant passif) mais il conservera la mémoire de sa dernière résistance : Pour le faire passer d'un état à l'autre il faudra lui appliquer une forte variation croissante ou décroissante de courant ou de tension ce qui correspond aux parties - - - - - sur la courbe ci-dessus (question 8) ; voir aussi question 29.

11. Compte tenu des hypothèses de l'énoncé, il vient immédiatement :
    $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q\overrightarrow{E_0}}{m}$.
    La solution est $\vec{v} = \overrightarrow{v_0}\exp(-\frac{t}{\tau}) + \frac{q\tau\overrightarrow{E_0}}{m}$; $\boldsymbol{\overrightarrow{v_{RP}} = + \frac{q\tau\overrightarrow{E_0}}{m}}$.
    Comme τ, qui correspond au temps caractéristique d'accès au régime permanent, vaut 10^{-12} s, l'hypothèse n'est pas contraignante.

12. On a immédiatement $\mu = \frac{q\tau}{m}$.
    Par définition, $\overrightarrow{j_0} = \rho_m\vec{v}$, où ρ_m est la densité de charges mobiles ; ici ρ_m = nq et $\vec{v} = \overrightarrow{v_{RP}}$. Soit, $\overrightarrow{j_0} = \frac{nq^2\tau\overrightarrow{E_0}}{m}$, loi d'Ohm locale et $\boldsymbol{\gamma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}}$.

13. On suppose que U_0 soit appliqué entre 0 et l ; comme le régime est permanent $\overrightarrow{E_0} = -\overrightarrow{grad}U_0$, soit $E_0 = \frac{U_0}{l}$.

D'autre part, $I = \iint_{M \in S} \vec{j_0} \cdot d\vec{S}$; soit avec les expressions précédentes : $I = \frac{nq^2\tau U_0}{ml}S$.

Avec l'expression de γ_0, on trouve bien $\mathbf{R_0 = \frac{l}{\gamma_0 S}}$.

14. Le résistor est un dipôle « memory less » car le sens de parcours du courant n'a pas d'influence sur son comportement ; il n'existe qu'une valeur de R, donc qu'un état du système.

15. $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q\overrightarrow{E_1}}{m}$ et $\vec{j} = nq\vec{v}$

En passant en complexes, en éliminant $\vec{v}$ et après quelques calculs élémentaires, $\underline{\vec{j}} = \frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}\underline{\overrightarrow{E_1}}$, où γ_0 est la conductivité statique déterminée plus haut.

On définit alors une conductivité complexe $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}$ à laquelle on peut associer une impédance complexe $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{\gamma}}\frac{l}{S} = R_0(1 + j\omega\tau)$.

On retrouve bien sûr $\underline{Z} = R_0$ à basse fréquence.

Le conducteur est passe-bas ; lorsque la fréquence augmente la conductivité diminue et le courant est en retard par rapport à la tension : le composant ne réagit plus « instantanément » au champ imposé.

16. Pour une charge, $P = \overrightarrow{F_{champ \to charge}}.\vec{v}$, soit ici $P = q\overrightarrow{E_0}.\overrightarrow{v_{RP}} = \frac{q^2\tau}{m}E_0^2$.

Pour avoir la puissance volumique, il suffit de multiplier la relation précédente par le nombre de charges par unité de volume : $\mathbf{P_{vol} = \frac{nq^2\tau}{m}E_0^2}$.

17. Intégrons P_{vol} le volume du conducteur : comme la quantité ci-dessus est uniforme, $P = \frac{nq^2\tau}{m}E_0^2 Sl$; or $E_0 = \frac{U_0}{l}$, soit $P = \frac{nq^2\tau}{m}(\frac{U_0}{l})^2 Sl$; or $I = \frac{nq^2\tau U_0}{ml}S$, d'où le résultat demandé.

18. Comme $p(t) = u(t)i(t)$ et que $u(t) = M(q(t))i(t)$, il vient $p(t) = M(q)i^2(t)$.

II. A MEMRISTOR IS A PIPE WHOSE DIAMETER VARIES

19. Le texte parle « d'écoulement lent » et de « petit diamètre » : V et d faibles.

Ecrivons le nombre de Reynolds : $R_e = \frac{Vd}{\upsilon}$; bien que l'on n'ait aucune idée de la valeur de la viscosité cinématique υ, on peut supposer le Reynolds suffisamment faible pour que l'écoulement soit laminaire.

D'autre part, l'écoulement est « la conséquence d'un écart de pression entrée-sortie » donc de type Poiseuille stationnaire. Rien n'est dit sur l'incompressibilité du fluide que l'on peut « raisonnablement » supposer.

On peut donc écrire une forme de vitesse v(r)$\overrightarrow{e_z}$. En l'occurrence, cela ne sert pas dans la suite…

20. $\frac{l}{d}$ est sans dimension, $\frac{\rho V^2}{2}$ est une énergie volumique i.e. une pression donc f est sans dimension.
Comme nous l'avons déjà dit l'écoulement est laminaire…
Sur le diagramme la partie à considérer est donc celle du flot laminaire ; en prenant deux points : (900 ; 7 10^{-2}) et (800 ; 8 10^{-2}), on obtient facilement **$f = \frac{64}{R_e}$**.

21. A partir de la formule de pertes de charge régulière donnée par l'énoncé et de $R_e = \frac{Vd}{\upsilon}$, soit $R_e = \frac{\rho V d}{\eta}$, on obtient $P_e - P_s = 32\frac{\eta V l}{d^2}$.
En exprimant le débit $D_{vol} = VS = V\pi\frac{d^2}{4}$ il vient $P_e - P_s = 128\frac{\eta D_v l}{\pi d^4}$ ou encore avec le rayon a de la conduite : **$P_e - P_s = 8\frac{\eta l}{\pi a^4} D_{vol}$.**

22. La forme précédente s'interprète en disant que la différence de pression imposée provoque un écoulement de débit volumique D_{vol} auquel s'oppose la viscosité du fluide traduite par la résistance $R_{hydrau} = 8\frac{\eta l}{\pi a^4}$.
De même dans une « conduite » électrique cylindrique de longueur l et de section πa^2, une différence de potentiel induit un courant auquel s'oppose la résistivité ρ du matériau : **$V_e - V_s = \frac{\rho l}{\pi a^2} I$**. On a alors $R_{élec} = \frac{\rho l}{\pi a^2}$; les analogies sont immédiates. La différence principale réside dans la dépendance en a^2 au lieu de a^4 : dans le cas du phénomène électrique la densité de courant est uniforme en régime stationnaire, alors que son analogue hydraulique, la vitesse, est fonction de la composante radiale (elle est parabolique en l'occurrence).
L'analogie thermique – électrique est par contre complète puisque la densité de courant thermique dans un conducteur thermique cylindrique de même forme est uniforme en régime permanent.

23. Oui, $P_e - P_s = R_{hydrau}(a)D_{vol}$ est analogue à u = Mi ; Si R_{hydrau} varie avec a, l'image est appropriée mais à condition que le tuyau n'ait que deux diamètres possibles et que chacun corresponde à un sens donné d'écoulement du fluide !

III. LE MEMRISTOR DES HP LAB

24. $R_{mem,0}$ est la somme de la résistance de la zone dopée et de la résistance de la zone non dopée, chacune étant proportionnelle à la longueur de chaque zone ($R = \frac{L}{\gamma S}$).
Soit $R_{mem,0} = R_{on}\frac{z_0}{l} + R_{off}\frac{l-z_0}{l}$, soit $R_{mem,0} = \frac{R_{on}-R_{off}}{l}z_0 + R_{off}$
Pour la suite, en tenant compte de l'évolution temporelle :
$R_{mem}(t) = \frac{R_{on}-R_{off}}{l}z(t) + R_{off}$.

25. $\frac{dz}{dt}$ représente la vitesse de la frontière entre les deux zones ; la relation indique très logiquement que :

- Plus la mobilité des charges est grande, plus la frontière se déplace rapidement.

- Plus l est grande, moins la frontière se déplace rapidement.

D'autre part on peut interpréter l'influence de i :

- Soit i > 0 : plus ce courant est important, plus les lacunes (et donc la frontière) se déplacent rapidement vers la droite, donc plus le dopage est sensible et plus $R_{mem}(t)$ est proche de R_{on}.

- Soit i < 0 : plus la valeur absolue de i est grande, plus la frontière se déplace rapidement vers la gauche, donc moins le dopage est sensible et plus $R_{mem}(t)$ est proche de R_{off}.

26. En utilisant la relation donnant $\frac{dz}{dt}$ ainsi que la relation $i = \frac{dq}{dt}$, puis en intégrant en tenant compte des conditions initiales données, on obtient :

$$z(t) = z_0 + \mu\frac{R_{on}}{l}q(t)$$

L'état le plus conducteur correspond à z(t) = l et le plus défavorable à $z_0 = 0$. Ainsi :

$$Q_{min} = \frac{l^2}{\mu R_{on}}$$

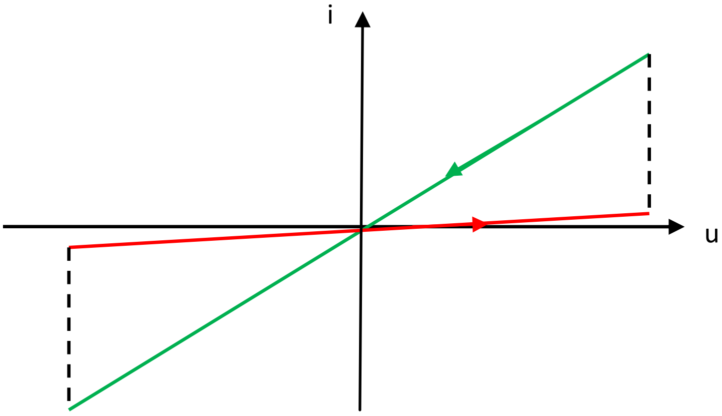
27. M(q) est calculable par u(t) = M(q)i(t) ; Or u(t) est la somme des tensions des deux résistances {zone dopée/zone non dopée} : $R_{mem}(t) = \frac{R_{on}-R_{off}}{l}z(t) + R_{off}$; d'où en introduisant $R_{mem,0}$: $M(q) = R_{mem,0} + R_{on}\,\frac{R_{on}-R_{off}}{l^2}\mu q(t)$.

La dépendance en l^2 montre que M(q) est d'autant plus grande que l est faible ; la mise en évidence d'un memristor est facilitée aux échelles nanométriques.

28. Avec les hypothèses, $R_{mem,0} \sim R_{off}$ et $\frac{R_{on}-R_{off}}{l^2} \sim -\frac{R_{off}}{l^2}$; soit,
$M(q) = R_{off} - \frac{R_{on}R_{off}}{l^2}\mu q(t)$.
Avec les relations de la première partie,

- $q(t) = \frac{i_0}{\omega}(1 - \cos(\omega t))$,
- $u(t) = [R_{off} - \frac{R_{on}R_{off}}{l^2}\mu\frac{i_0}{\omega}(1 - \cos(\omega t))]i_0\sin(\omega t)$
- Enfin on obtient ϕ par intégration de $d\phi = M(q)dq = (R_{off} - \frac{R_{on}R_{off}}{l^2}\mu q(t))dq$,
  $\phi(t) = R_{off}\frac{i_0}{\omega}(1 - \cos(\omega t)) - \frac{R_{on}R_{off}}{2l^2}\mu[\frac{i_0}{\omega}(1 - \cos(\omega t))]^2$.

29. Si l’on retrace la courbe de la figure 7 en ôtant les parties verticales irrégulières, on obtient :



On voit bien l’existence de deux résistances très différentes qui sont obtenues, pour une valeur de u donnée, pour des valeurs très différentes de i et des sens de variation opposés, ce qui correspond à ce qui est attendu.