

I Pôles géographiques et magnétiques

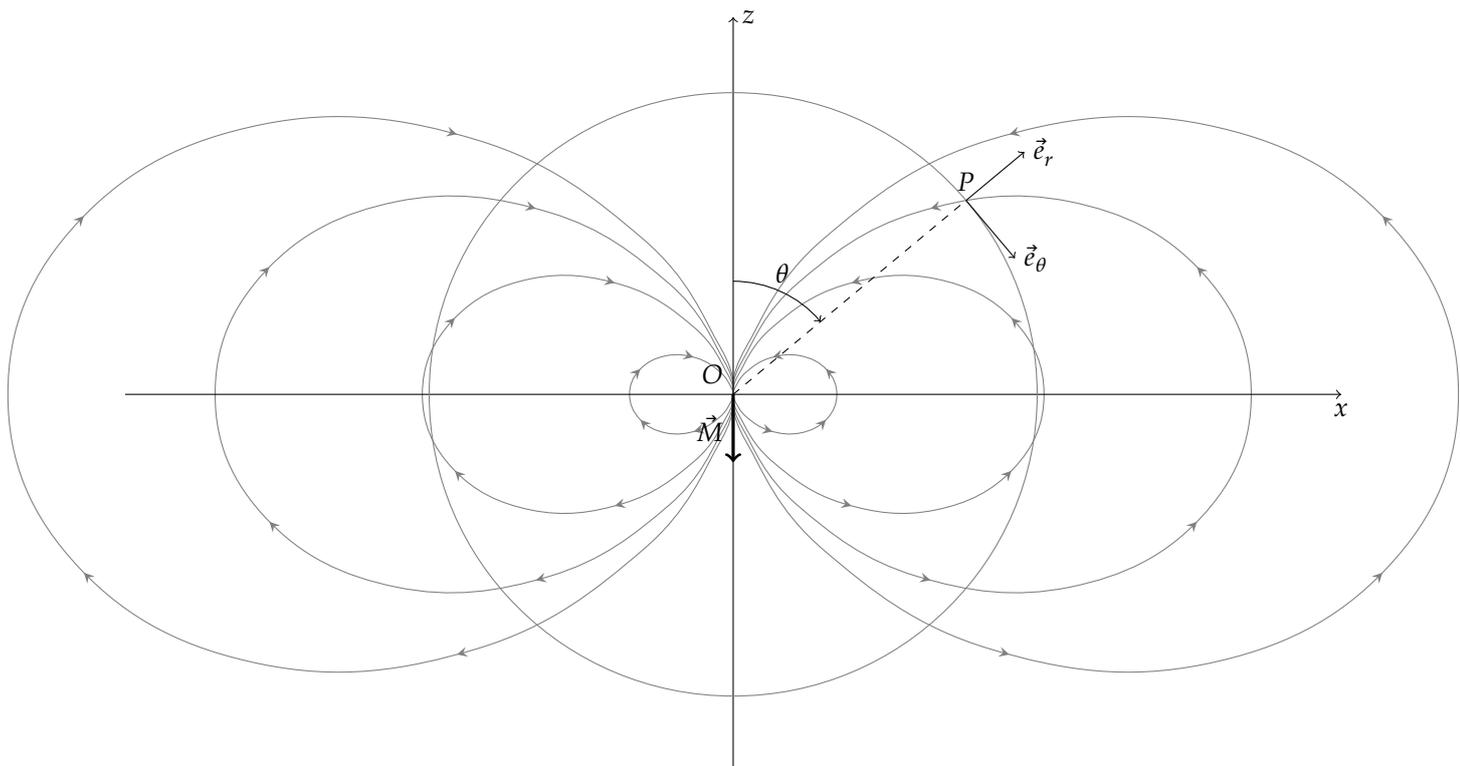
I.A Boussole, champ magnétique et dipôle centrale

Le type de boussole décrit dans cet énoncé ne correspond pas aux boussoles utilisées actuellement par les randonneurs :

- L'aiguille des boussoles modernes n'est pas aimantée, elle est constituée d'un matériau qui n'a pas de propriété magnétique particulière. Cette aiguille sert uniquement à indiquer la direction du nord magnétique.
- Des aimants permanents de petite dimension sont placés sur une pièce mobile près de l'axe de rotation de la boussole. Cette pièce magnétique a un diamètre de l'ordre du millimètre.
- La direction du moment magnétique de la boussole n'est pas confondu avec celui de l'aiguille aimantée : si la boussole est prévue pour être utilisée dans l'hémisphère nord, le moment magnétique est incliné d'environ 60° vers le bas. Si la boussole est conçue pour être utilisée en Australie, dans le sud de l'Amérique ou de l'Afrique, le moment magnétique est incliné d'environ 60° vers le haut.
- Certaines boussoles indiquent le nord correctement sur toute la surface de la Terre à l'exception des régions polaires : les aimants sont placés sur une pièce qui est en liaison rotule avec le corps de la boussole. Le moment magnétique peut donc avoir une composante importante vers le haut ou vers le bas sans que l'aiguille ne soit affectée par ce mouvement.
- La capsule des boussoles modernes est rempli d'un liquide qui joue deux rôles. D'une part, la poussée d'Archimède qui s'exerce sur les parties mobiles permet de réduire les forces verticales, et donc les frottements solide entre l'équipage mobile et le pivot. D'autre part, les frottements fluides réduisent les oscillations de l'aiguille, les boussoles ont souvent un amortissement proche de la valeur critique, l'aiguille se place alors rapidement et sans osciller dans la direction du nord. (On n'observe pas les oscillations décrites à la question 2 avec une boussole moderne.)
- Les pivots et les pièces magnétiques utilisés font que l'aiguille ne pivote librement que si l'axe de la boussole est proche de la verticale. Si l'écart est de 20° ou plus, les frottements entre l'aiguille et la capsule sont tels que l'aiguille ne bouge pas. Il est impossible, en plaçant l'axe à l'horizontal de mettre en évidence l'inclinaison du champ magnétique terrestre. (La réponse suggérée par l'énoncé à la question 5 n'est pas réalisable.)



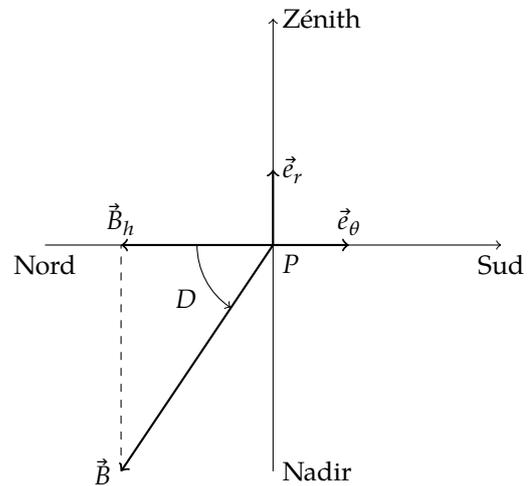
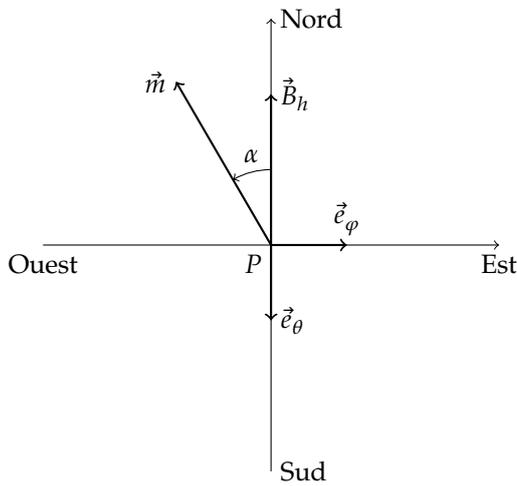
1. La carte de champ magnétique dipolaire a l'allure suivante :



En un point P à la surface de la Terre :

plan horizontal

plan vertical

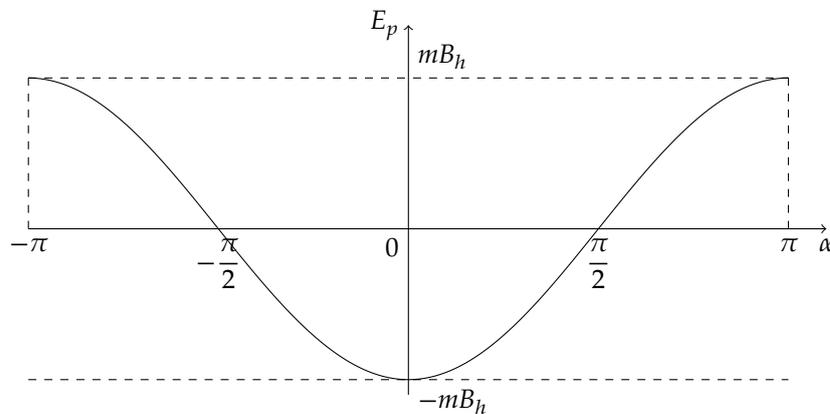


L'énergie potentielle d'interaction entre le moment magnétique de la boussole et le champ magnétique terrestre est :

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

En notant \vec{B}_h la composante horizontale du champ magnétique terrestre, qui est dirigée vers le nord : $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_h$.

Donc $E_p = -mB_h \cos \alpha$.



La position $\alpha = 0$ correspond à un minimum d'énergie potentielle, il s'agit donc d'une position d'équilibre stable.

L'aiguille indique le nord et cette position est stable.

2. L'énergie cinétique de l'aiguille est $E_c = \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2$ et l'énergie mécanique totale est $E_m = \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 - mB_h \cos \alpha$.

La conservation de l'énergie se traduit par $\frac{dE_m}{dt} = 0$. Donc $I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mB_h \sin \alpha = 0$

Pour de petits mouvements : $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mB_h}{I} \sin \alpha = 0$

La période d'oscillation est alors : $\tau_{osc} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I}{mB_h}}$.

La période d'oscillation permet de connaître la composante horizontale du champ magnétique : $B_h = \frac{I}{4\pi^2 \tau_{osc}^2 m}$

3. Le champ magnétique est $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R_T^2 \vec{M}}{R_T^3}$ avec $\begin{cases} \vec{R} = R_T \vec{e}_r \\ \vec{M} = M_0 (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \end{cases}$.

$$\text{Donc } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \frac{3 \cos \theta \vec{e}_r - (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)}{R_T^3}$$

$$\text{Donc } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \frac{2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta}{R_T^3}$$

4. En un point de l'équateur, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\vec{B} = B_E \vec{e}_z = -B_E \vec{e}_\theta$.

$$\text{Donc } \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_\theta = -B_E \vec{e}_\theta. \text{ Donc } M_0 = -\frac{4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0}. \quad M_0 < 0 \text{ et } M_0 = -7,9 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$$

Avec $\theta = 0$ au pôle nord et $\theta = \pi$ au pôle sud, le champ magnétique est $\vec{B}_p = -\frac{2\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_z$. Donc $B_p = 2B_E = 6,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

5. L'angle D défini par l'énoncé n'est pas la déclinaison magnétique mais l'inclinaison, généralement notée I .

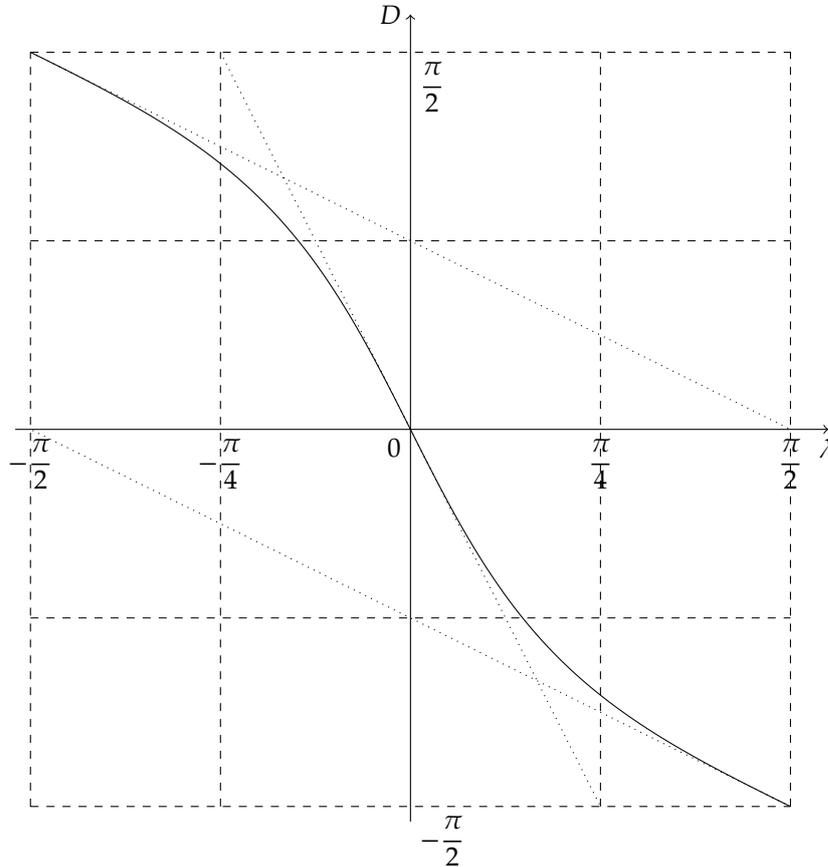
- Dans l'hémisphère nord, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, et $\vec{B} \cdot \vec{e}_r < 0$. La composante verticale du champ magnétique est dirigée vers le bas.

Dans l'hémisphère nord, l'inclinaison est négative.

- $\tan D = -\frac{\vec{B} \cdot \vec{e}_r}{\vec{B} \cdot \vec{e}_\theta}$.

Donc $\tan D = -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$. Or $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ et donc $\tan D = -2 \tan \lambda$

- Le graphique donnant l'inclinaison D en fonction de la latitude est :



- À proximité des pôles, la composante horizontale du champ magnétique terrestre est faible. Le couple qui oriente l'aiguille de la boussole est donc beaucoup plus faible qu'à l'équateur ou aux latitudes moyennes. En outre, les courants électriques dans la haute atmosphère sont plus intenses au voisinage des régions polaires. Les champs magnétiques créés par ces courants peuvent avoir une influence comparable ou supérieure à celle du champ terrestre. L'aiguille de la boussole peut avoir une direction fluctuante et parfois éloignée de celle du pôle nord.

- Pour déterminer dans quel hémisphère on se trouve, on pourrait être tenté de placer l'axe de la boussole horizontalement, dans la direction Est-Ouest. Si le pôle nord de l'aiguille plonge vers le sol, la boussole est dans l'hémisphère nord. Inversement, si le pôle nord se dirige vers le haut, la boussole est dans l'hémisphère sud. Mais cette technique ne fonctionne pas avec les boussoles usuelles. Les frottements entre l'aiguille et la capsule sont trop importants dans cette position.

Il est possible d'utiliser une boussole d'inclinaison, comme celle représentée ci-contre. L'axe de cette boussole doit être placé perpendiculairement au méridien magnétique et l'aiguille s'aligne alors avec le champ magnétique terrestre. Cette boussole permet de déterminer l'angle d'inclinaison, et donc de savoir dans quel hémisphère on se trouve.

Avec une boussole moderne conçue pour fonctionner dans l'hémisphère nord, il suffit de regarder si l'aiguille se déplace librement lorsque la boussole est placée dans la position usuelle, avec son axe vertical. Si c'est le cas, vous êtes dans l'hémisphère nord. Si l'aiguille frotte sur les parois de la capsule, vous êtes dans l'hémisphère sud.

Enfin, il est possible d'attendre que la nuit tombe et d'observer les étoiles. La réponse à la question est alors évidente, mais la boussole ne sert à rien.



I.B Aurores polaires

6. La force de LORENTZ est $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0$. Cette force ne travaille pas : l'énergie cinétique se conserve. Donc la norme de la vitesse est constante.

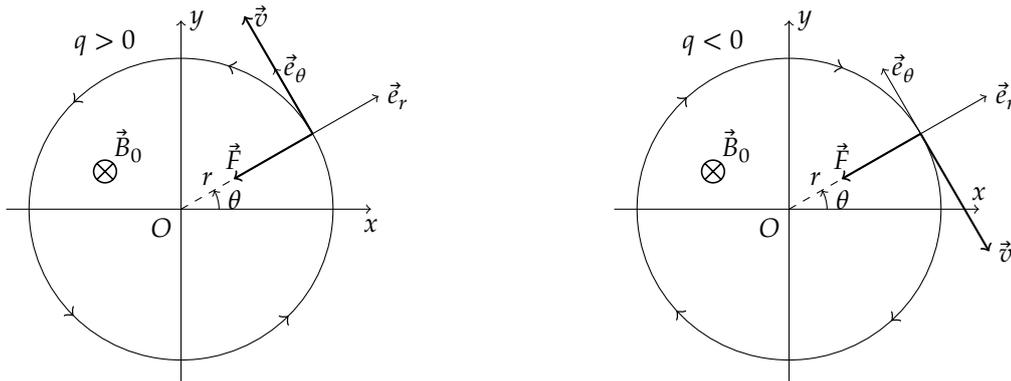
La mouvement est circulaire uniforme.

Pour un mouvement circulaire uniforme, la vitesse est $\vec{v} = r\omega_c\vec{e}_\theta$ l'accélération est $\vec{a} = -r\omega_c^2\vec{e}_r$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule chargée est alors : $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0$.

Donc $mr\omega_c^2 = |q|B_0r\omega_c^2$ et donc $\omega_c = \frac{|q|B_0}{m}$

Le sens de parcours dépend du signe de la charge q :



7. L'intensité comptée positivement dans le sens trigonométrique, associée à la rotation de la particule chargée est $i = \frac{q}{T}$ où $T = \frac{2\pi r}{v}$ est la période de révolution.

Le moment magnétique associé à la boucle de courant est $\vec{M} = \pi r^2 i \vec{e}_z$. Donc $\vec{M} = \frac{1}{2} r q v \vec{e}_z$.

Et donc $\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -\frac{1}{2} r q v B_0$. Or, en utilisant la relation fondamentale de la dynamique $q v B_0 = m \frac{v^2}{r}$.

Donc $\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -\frac{1}{2} m v^2$, et donc $\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -E_c$

8. La situation au voisinage du pôle nord est représenté ci-contre.

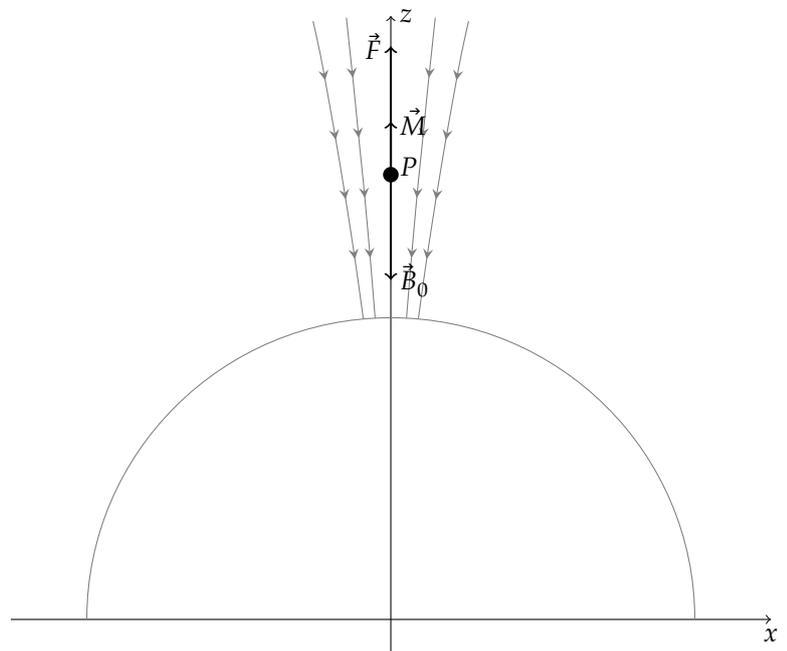
Le champ magnétique terrestre est $\vec{B}_0 = -B_0(z)\vec{e}_z$ avec $B_0 > 0$.

Sur l'axe Oz , la norme du champ magnétique décroît avec l'altitude, donc $\frac{dB_0}{dz} < 0$

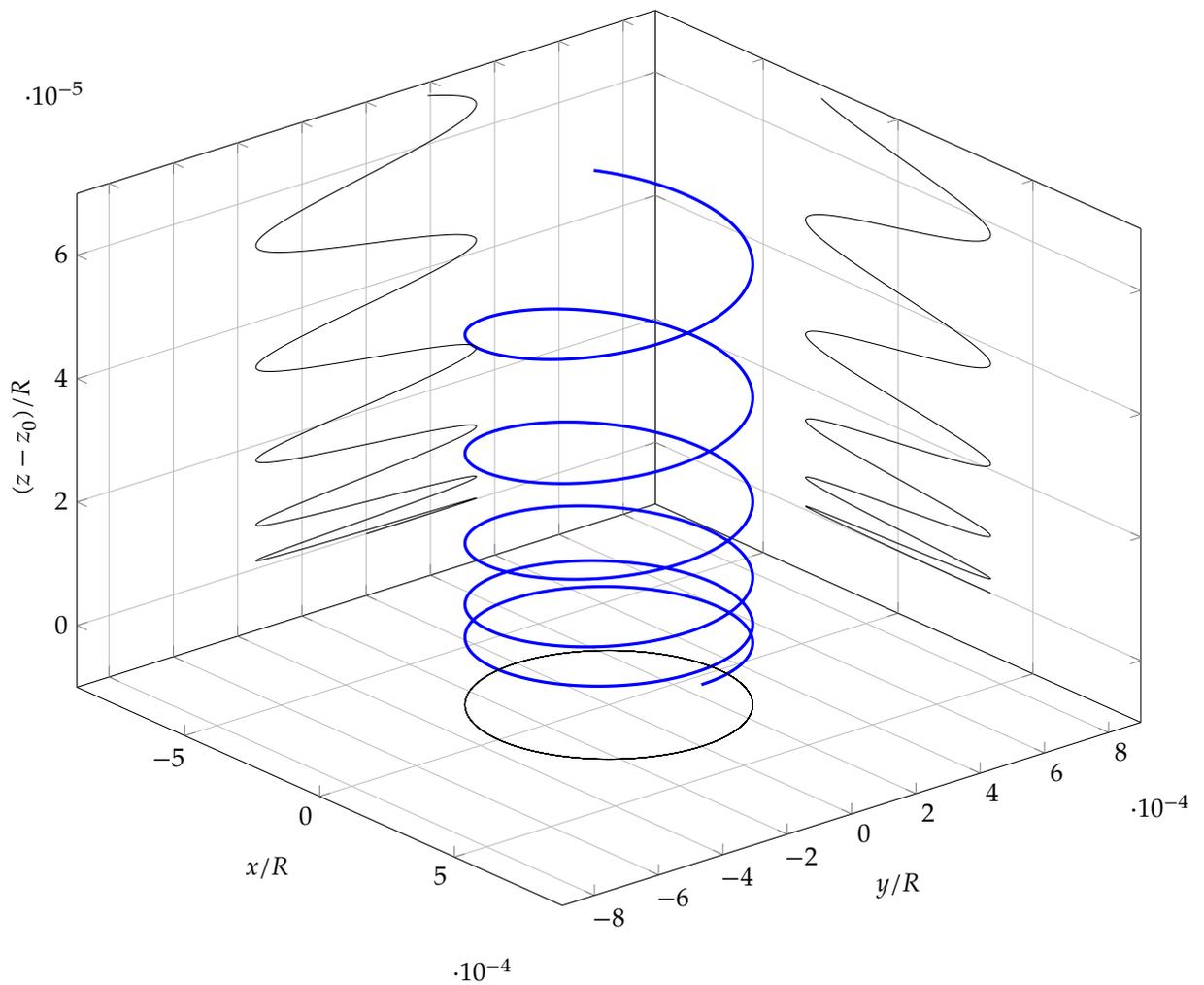
Le mouvement du proton a été décrit à la question 6 : $\vec{M} = M_z \vec{e}_z$ avec $M_z > 0$.

La force subit par le proton est $\vec{F} = -M_z \frac{dB_0}{dz} \vec{e}_z$ avec $= -M_z \frac{dB_0}{dz} > 0$. Donc $\vec{F} = F_z \vec{e}_z$ avec $F_z > 0$.

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = -B_0(z)\vec{e}_z & \text{avec } B_0 > 0 \\ \vec{M} = M_z \vec{e}_z & \text{avec } M_z > 0 \\ \vec{F} = F_z \vec{e}_z & \text{avec } F_z > 0 \end{cases}$$

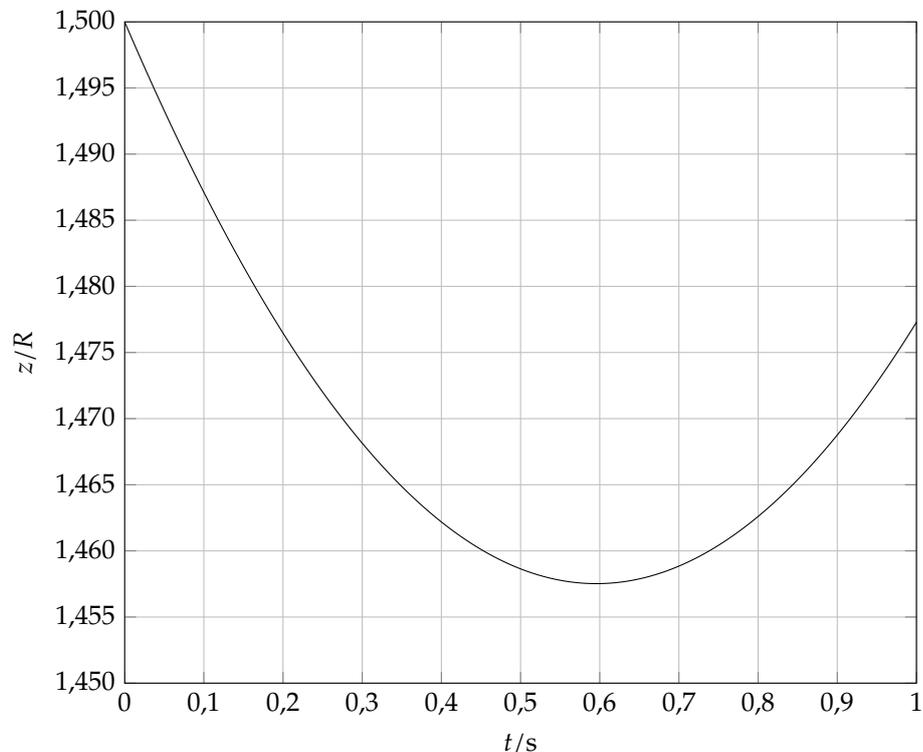


La force de LORENTZ ne travaille pas, la norme de la vitesse est donc constante au cours du mouvement. La trajectoire d'un proton est une hélice dont le pas et le rayon sont variables. La courbe ci-dessous donne l'allure de la trajectoire pour quelques périodes cyclotron.



Le mouvement de rotation est due à la force de LORENTZ, qui est essentiellement dirigée vers l'axe de la trajectoire hélicoïdale qui est une ligne de champ.

Le mouvement de dérive est due à la force moyenne $\vec{F} = -M_z \frac{dB_0}{dz} \vec{e}_z$. La figure ci-dessous donne l'allure de l'altitude $z(t)$ d'un proton. La force \vec{F} est dirigée vers le haut (dans le sens des z croissants.)



Si l'on ne considère que la composante verticale du mouvement, le proton est freiné lorsqu'il s'approche de la Terre, il est accéléré lorsqu'il s'en éloigne.

9. L'équation de MAXWELL-THOMSON s'écrit $\text{div } \vec{B} = 0$.

Donc avec un champ magnétique de la forme $\vec{B}_0 = -B_0(z)\vec{e}_z$, l'équation de MAXWELL-THOMSON implique $\frac{dB_0}{dz} = 0$ et donc $G_m(z) = 0$.

En réalité, le champ magnétique au voisinage de l'axe (Oz) est de la forme $\vec{B} \simeq -B_0(z, r)\vec{e}_z - B_r(r, z)\vec{e}_r$ avec $B_r(r, z) \ll B_0(z)$.

L'équation de MAXWELL-THOMSON implique alors $\frac{\partial B_0}{\partial z} = -\frac{\partial B_r}{\partial r}$. Et alors $G_m(z) \neq 0$.

10. Les équations obtenues aux questions précédentes :

$$\begin{cases} E_c = M(z)B_0(z) & \text{énergie cinétique constante} \\ F_z = -M(z)\frac{dB_0}{dz} & \text{force de dérive} \\ B_0(z) = \frac{\mu_0 M_0}{2\pi z^3} & \text{champ magnétique sur l'axe } (Oz) \end{cases}$$

Donc
$$\begin{cases} F_z = -\frac{E_c}{B_0(z)} \frac{dB_0}{dz} \\ \frac{1}{B_0(z)} \frac{dB_0}{dz} = -\frac{3}{z} \end{cases}$$

Donc, la force de dérive qui agit sur un proton est $F_z = \frac{2E_c}{z}$.

Au voisinage immédiat de la Terre, les forces qui agissent sur le proton sont la force de dérive et le poids :

$$\begin{cases} F_z = \frac{2E_c}{R_T} & \text{force de dérive} \\ P = mg & \text{poids} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_z = 3,8 \cdot 10^{-23} \text{ N} & \text{force de dérive} \\ P = 1,7 \cdot 10^{-26} \text{ N} & \text{poids} \end{cases}$$

Avec les valeurs précédentes $\frac{P}{F_z} = 4,4 \cdot 10^{-4}$. Le poids est négligeable devant la force dérive.

II La glace de la banquise

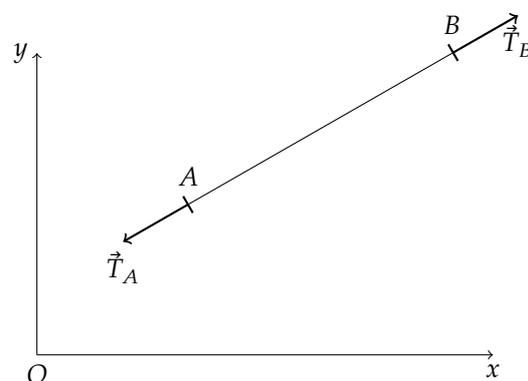
II.A Un traineau sur la glace

11. On considère un tronçon de corde entre les points A et B . O est un point fixe dans le référentiel d'étude.

La corde étant de masse négligeable, sa quantité de mouvement et son moment cinétique sont nuls. Donc :

$$\begin{cases} \vec{T}_A + \vec{T}_B = \vec{0} & \text{relation fondamentale de la dynamique} \\ \vec{OA} \wedge \vec{T}_A + \vec{OB} \wedge \vec{T}_B = \vec{0} & \text{théorème du moment cinétique} \end{cases}$$

Donc :
$$\begin{cases} \vec{T}_B = -\vec{T}_A \\ \vec{AB} \wedge \vec{T}_A = \vec{0} \end{cases}$$

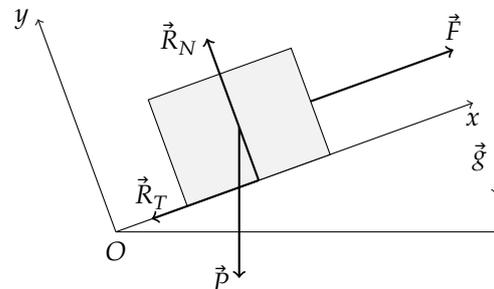


La tension est la même aux deux extrémités de la corde, et la tension est colinéaire à la corde.

12. Les forces qui s'exercent sur le traineau sont :

$$\begin{cases} M\vec{g} & \text{poids} \\ \vec{F} = F\vec{e}_x & \text{force de traction} \\ \vec{R}_N = R_N\vec{e}_y & \text{force de réaction normale} \\ \vec{R}_T = -R_T\vec{e}_x & \text{force de réaction tangentielle} \end{cases}$$

La loi de COULOMB s'écrit $R_T = \mu_d R_N$.



La relation fondamentale de la dynamique s'écrit : $M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{F}$

En projection sur les axes (Ox) et (Oy) :
$$\begin{cases} M\ddot{x} = Mg \sin \alpha - \mu_d R_N + F \\ 0 = -Mg \cos \alpha + R_N \end{cases}$$

Donc $M\ddot{x} = Mg \sin \alpha - \mu_d Mg \cos \alpha + F$

.Si on pose $\mu'_d = \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$, alors l'équation du mouvement s'écrit : $M\ddot{x} = \mu'_d Mg + F$.

L'équation est alors similaire à celle écrite dans le cas $\alpha = 0$.

$$\mu'_d = \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$$

13. On considère la situation
$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$
.

Les équations précédentes deviennent : $\begin{cases} R_N = Mg \\ F = R_T \end{cases}$

Le démarrage a lieu si $R_T = \mu_s R_N$, donc $\boxed{F_0 = \mu_s Mg}$, $\boxed{F_0 = 3,9 \cdot 10^2 \text{ N}}$

14. L'équation du mouvement est, dans la situation étudiée : $M \frac{dv}{dt} = F_0 - \beta v(t) - \mu_d Mg$

Donc $\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{M} v(t) = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{M}$.

La solution est, en tenant compte de la condition initiale $v(0) = 0$: $v(t) = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{M}t}\right)$

La vitesse limite est donc $v_0 = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta}$.

On note $a = 5 \cdot 10^{-2}$. Alors $v(t_1) = v_0(1 - a) = v_0 \left(1 - e^{-\frac{\beta}{M}t_1}\right)$

Donc $\boxed{\beta = \frac{M}{t_1} \ln \frac{1}{a}}$. Et $\boxed{F_0 = \beta v_0 + \mu_d Mg}$. Donc $\begin{cases} \beta = 3,0 \cdot 10^2 \text{ kg/s} \\ F_0 = 1,1 \cdot 10^3 \text{ N} \end{cases}$

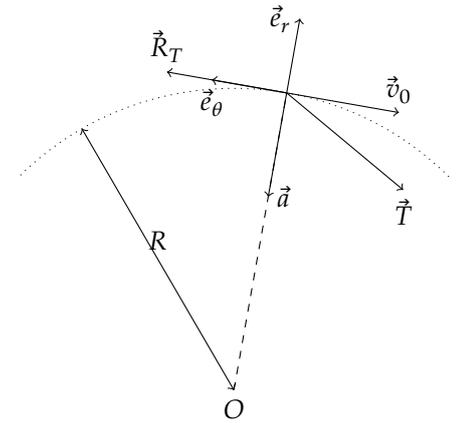
15. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$M\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$

Avec : $\begin{cases} \vec{a} = -\frac{v_0^2}{R} & \text{mouvement circulaire uniforme} \\ \vec{P} = -Mg\vec{e}_z & \text{poids} \\ \vec{R}_N = R_N\vec{e}_z \\ \vec{R}_T = R_T\vec{e}_\theta \\ R_T = \mu_d R_N & \text{loi de COULOMB} \end{cases}$

Donc, en projection sur la base polaire : $\begin{cases} T \cos \theta = \mu_d Mg \\ T \sin \theta = M \frac{v_0^2}{R} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} T = M \sqrt{\mu_d^2 g^2 + \frac{v_0^4}{R^2}} \\ \tan \theta = \frac{v_0^2}{\mu_d R g} \end{cases}$



II.B Croissance hivernale de la couche de glace

16. Le vecteur densité de courant thermique est donné par la loi de FOURIER : $\vec{j}_{th}(z, t) = -\overrightarrow{\text{grad}} T_g$.

Donc $\vec{j}_{th}(z, t) = -\lambda_g \frac{\partial T_g(z, t)}{\partial z} \vec{e}_z = j_{th}(z, t) \vec{e}_z$.

Le premier principe de la thermodynamique, appliqué à la tranche comprise entre z et $z + \delta z$ et

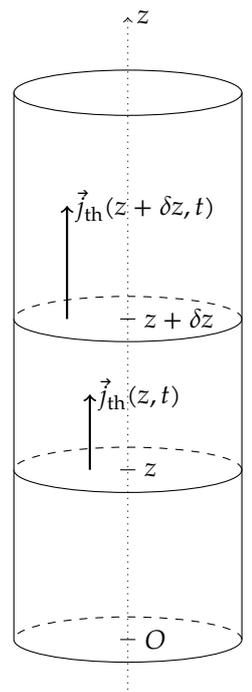
entre t et $t + dt$, s'écrit : $\begin{cases} d^2H = \rho_g c_g S \delta z [T_g(z, t + dt) - T_g(z, t)] \\ d^2H = S j_{th}(z + \delta z, t) dt - S j_{th}(z, t) dt \end{cases}$

Donc $\begin{cases} d^2H = \rho_g c_g S \frac{\partial T_g(z, t)}{\partial t} \delta z dt \\ d^2H = S \frac{\partial j_{th}(z, t)}{\partial z} \delta z dt \end{cases}$

Donc $\rho_g c_g \frac{\partial T_g(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial j_{th}(z, t)}{\partial z}$

Et en utilisant la loi de FOURIER : $\rho_g c_g \frac{\partial T_g(z, t)}{\partial t} + \lambda_g \frac{\partial^2 T_g(z, t)}{\partial z^2} = 0$

Donc $\boxed{\frac{\partial T_g(z, t)}{\partial t} + \frac{\lambda_g}{\rho_g c_g} \frac{\partial^2 T_g(z, t)}{\partial z^2} = 0}$



17. Si on note ΔT_g un ordre de grandeur des variations de température dans la glace : $\frac{\Delta T_g}{\Delta t} \approx \frac{\lambda_g}{\rho_g c_g} \frac{\Delta T_g}{(\Delta z)^2} = 0$

Donc $\boxed{\Delta t = \frac{\rho_g c_g}{\lambda_g} (\Delta z)^2}$

Pour que le régime quasi-stationnaire soit atteint, il faut que $t \gg \frac{\rho_g c_g z_g^2(t)}{\lambda_g}$

Pour que l'évolution puisse être considérée comme «assez lente» il faut que la vitesse de croissance de la couche de glace soit plus lente que la vitesse de diffusion dans la glace.

18. Si on note $\Delta T = T_g(z_g(t), t) - T_g(0, t)$ la différence de température entre les deux extrémités de la glace et Φ_g le flux thermique à travers la glace dans le sens des z

croissants, la résistance thermique est définie par $R_g = \frac{-\Delta T}{\Phi_g}$.

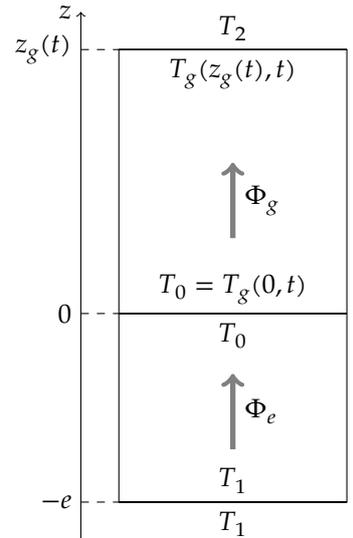
En régime quasi-permanent, le profil de température est $T_g(z, t) = \frac{\Delta T}{z_g(t)}z + T_g(0, t)$.

Le vecteur densité de courant thermique est alors $j_{th}(z, t) = -\lambda_g \frac{\Delta T}{z_g(t)}$. Et le flux

thermique est $\Phi_g = S j_{th}(0, t) = S \lambda_g \frac{-\Delta T}{z_g(t)}$.

Donc $R_g(t) = \frac{z_g(t)}{S \lambda_g}$.

De la même manière, la résistance thermique de l'eau est $R_e = \frac{e}{S \lambda_e}$.



19. La loi de NEWTON donne le flux thermique dans le sens des z croissants : $\Phi_i = \Phi_g = Sh [T_g(z_g(t), t) - T_2]$.

La résistance thermique de l'interface est donc : $R_i = \frac{1}{Sh}$.

20. On considère la couche d'eau d'épaisseur $dz_g(t)$ qui change d'état entre les instants t et $t + dt$. Le premier principe de la thermodynamique appliqué à ce système s'écrit :

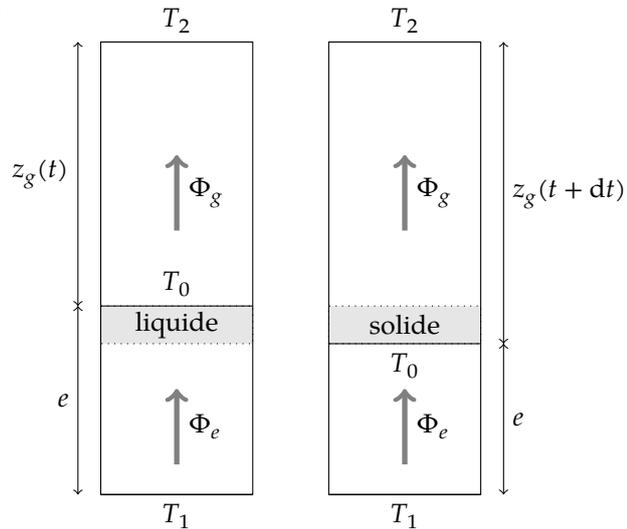
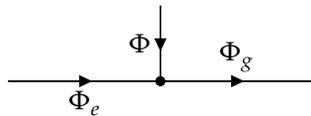
$$\begin{cases} d^2H = -\rho_g l_f S \frac{dz_g}{dt} dt & \text{changement d'état} \\ d^2H = (\Phi_e - \Phi_g) dt & \text{échange thermique avec l'extérieur} \end{cases}$$

Donc $-\rho_g l_f S \frac{dz_g}{dt} = \Phi_e - \Phi_g$.

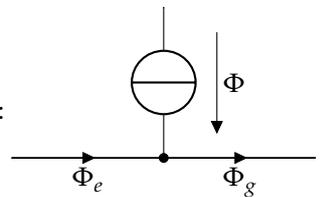
On pose $\Phi = \rho_g l_f S \frac{dz_g}{dt}$.

L'équation précédente s'écrit alors : $\Phi + \Phi_e = \Phi_g$.

Cette équation peut être interprétée comme une loi des nœuds :

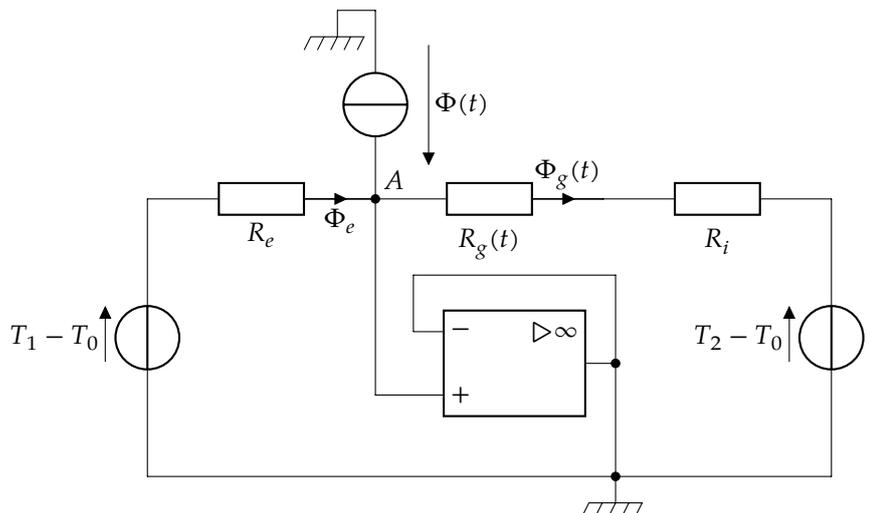


Le changement d'état de l'eau peut être modélisé par une source de courant $\Phi = \rho_g l_f S \frac{dz_g}{dt}$:



21. Un montage suiveur permet d'assurer un potentiel nul en un point du circuit. Le montage à réaliser est représenté ci-contre.

Le changement d'état se fait à la température $T_0 = 273$ K. La température de la couche de glace en contact avec l'eau est donc constante. On utilise cette température comme référence pour le schéma électrique.



22. La loi des nœuds en terme de potentiel en A s'écrit : $\Phi(t) + \frac{T_1 - T_0}{R_e} + \frac{T_2 - T_0}{R_g(t) + R_i} = 0$

Donc, en utilisant les expressions des résistances trouvées aux questions précédentes : $\frac{\Phi(t)}{S} + \frac{T_1 - T_0}{\frac{e}{\lambda_e}} + \frac{T_2 - T_0}{\frac{z_g(t)}{\lambda_g} + \frac{1}{h}} = 0$

Or $\begin{cases} \frac{e}{\lambda_e} \gg \frac{z_g(t)}{\lambda_g} + \frac{1}{h} \\ |T_1 - T_0| < |T_2 - T_0| \end{cases}$, donc $\frac{|T_1 - T_0|}{\frac{e}{\lambda_e}} \ll \frac{|T_2 - T_0|}{\frac{z_g(t)}{\lambda_g} + \frac{1}{h}}$

L'équation précédente se simplifie donc en : $\frac{\Phi(t)}{S} + \frac{T_2 - T_0}{\frac{z_g(t)}{\lambda_g} + \frac{1}{h}} = 0$

Avec l'expression du flux donnée à la question 20 : $\rho_g \ell_f \frac{dz_g}{dt} + \frac{T_2 - T_0}{\frac{z_g(t)}{\lambda_g} + \frac{1}{h}} = 0$

Donc, l'équation différentielle vérifiée par $z_g(t)$ est : $\left(z_g(t) + \frac{\lambda_g}{h} \right) \frac{dz_g}{dt} = \frac{(T_0 - T_2)\lambda_g}{\rho_g \ell_f}$

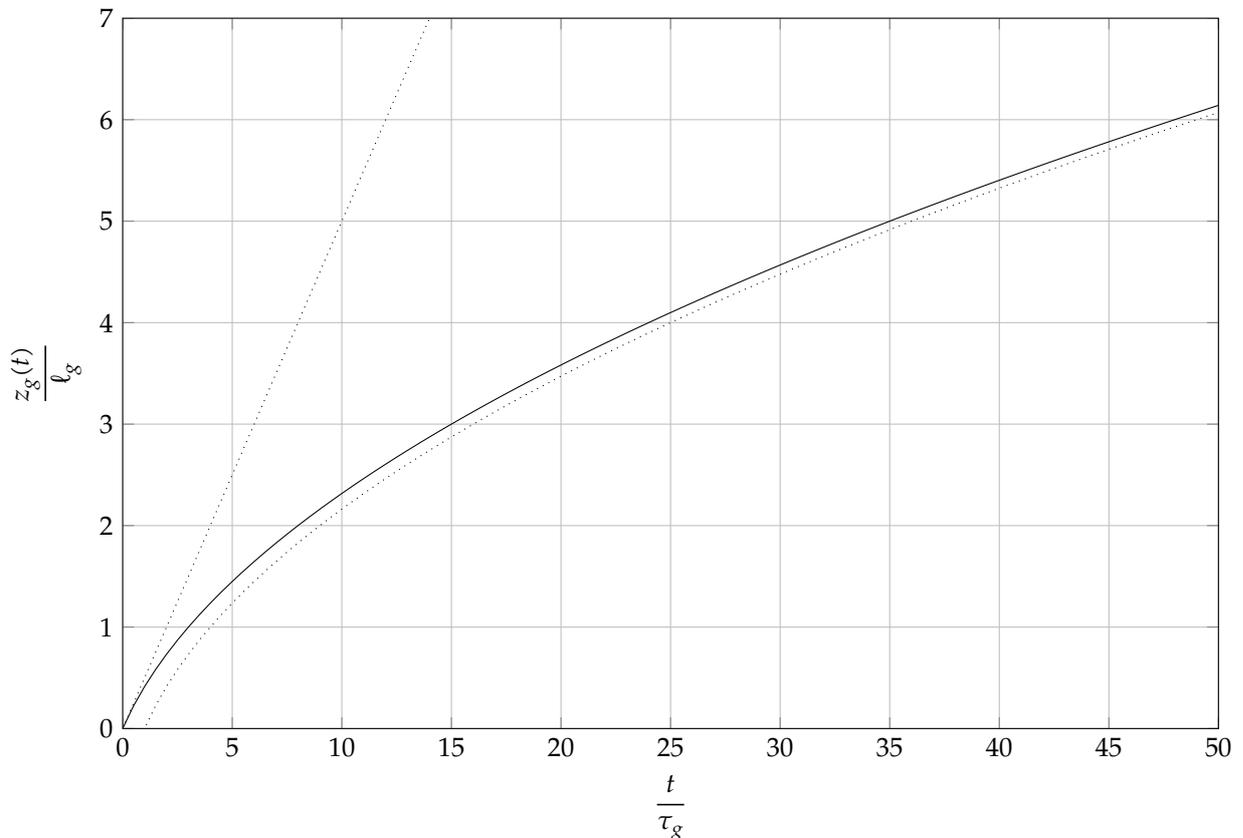
Donc $\int_0^t \left(z_g(t') + \frac{\lambda_g}{h} \right) \frac{dz_g(t')}{dt'} dt' = \frac{(T_0 - T_2)\lambda_g}{\rho_g \ell_f} \int_0^t dt'$

Avec $z_g(0) = 0$: $\frac{z_g^2(t)}{2} + \frac{\lambda_g}{h} z_g(t) = \frac{(T_0 - T_2)\lambda_g}{\rho_g \ell_f} t$

Et $z_g^2(t) + \frac{2\lambda_g}{h} z_g(t) = \left(\frac{2\lambda_g}{h} \right)^2 \frac{(T_0 - T_2)h^2}{2\rho_g \ell_f \lambda_g} t$

$z_g^2(t) + \ell_g z_g(t) = \ell_g^2 \frac{t}{\tau_g}$ avec $\begin{cases} \ell_g = \frac{2\lambda_g}{h} \\ \tau_g = \frac{2\rho_g \ell_f \lambda_g}{(T_0 - T_2)h^2} \end{cases}$

23. L'équation précédente admet pour solution positive : $z_g(t) = \frac{\ell_g}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{t}{\tau_g}} \right)$.



Pour $t \ll \tau_g$: $z_g(t) \simeq \ell_g \frac{t}{\tau_g}$. L'épaisseur de la glace croît linéairement avec le temps.

Pour $t \gg \tau_g$: $z_g(t) \simeq \ell_g \left(\sqrt{\frac{t}{\tau_g}} - \frac{1}{2} \right)$. La croissance de la couche de glace est de plus en plus lente.