

CCMP PSI 2021 Physique 1

Télécommunications

Corrigé proposé par Nicolas Choimet, PSI*, Eiffel Bordeaux

nicolas.choimet@live.fr

I. Le fil du télégraphe

Q1 Les caractères à coder sont les 32 lettres, les 10 chiffres arabes et 7 symboles de ponctuation (« . », « , », « ; », « : », « ? », « ! » et « espace »), soit 49 caractères différents à coder.

Pour coder N caractères en binaires, il faut n bits avec : $2^{n-1} + 1 \leq N \leq 2^n$. Or, 49 est compris entre $2^5 + 1 = 33$ et $2^6 = 64$. Par conséquent, il faut coder le texte sur 6 bits.

La saisie d'un caractère sur 6 bits nécessite environ 3 secondes. Dans une page, on peut estimer le nombre de caractère à environ 3000. Il faut donc environ 9000 secondes, soit 2h30.

I.A. Transmission par une ligne bifilaire

Q2 L'examen des deux équations proposées montre que :

$$\begin{cases} \frac{[R_0]}{[\ell_0]} = V \cdot A^{-1} \cdot m^{-1} = \Omega \cdot m^{-1} \\ \frac{[R_0]}{[\chi_0]} = V \cdot A^{-1} \cdot m^{-1} \cdot s = \Omega \cdot m^{-1} \cdot s \\ [R_0][\chi_0] = V \cdot A^{-1} \cdot m \cdot s^{-1} = \Omega \cdot m \cdot s^{-1} \end{cases}$$

On en déduit :
$$\begin{cases} [R_0] = \Omega \\ [\ell_0] = m \\ [\chi_0] = m \cdot s^{-1} \end{cases}$$

Q3 La Terre joue le rôle du second conducteur, le courant revenant par le sol. Le modèle de la ligne bifilaire reste donc applicable.

Q4 On dérive la première équation par rapport à z et on y injecte la seconde, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{R_0}{\chi_0} \left(-\frac{1}{R_0 \chi_0} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{R_0}{\ell_0} \left(\frac{1}{R_0 \chi_0} \right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\chi_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\ell_0 \chi_0} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Cette équation étant linéaire, on peut en chercher des solutions en OPPH* de la forme : $\bar{u}(z, t) = U_0 \exp i(\omega t - kz)$. On en déduit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{\chi_0^2} - i \frac{\omega}{\ell_0 \chi_0} = \frac{\omega^2}{\chi_0^2} \left(1 - i \frac{\chi_0}{\ell_0 \omega} \right)$$

Q5 On suppose, d'après l'énoncé, que $\frac{\chi_0}{\ell_0 \omega} \ll 1$. Par conséquent :

$$k \approx \frac{\omega}{\chi_0} \left(1 - i \frac{\chi_0}{2\ell_0 \omega} \right)$$

La vitesse de phase vaut, par définition : $v_\phi = \frac{\omega}{\text{Re}(k)}$. Par conséquent :

$$v_\phi = \chi_0$$

Il n'y a donc pas dispersion à cet ordre du développement, puisque χ_0 est une constante.

Q6 La deuxième équation couplant le courant et la tension fournit, la ligne étant supposée infinie (on n'a qu'une onde progressive) :

$$\bar{i}(z, t) = \frac{U_0}{R_0 \chi_0} \frac{\omega}{k} \exp i(\omega t - kz) \approx \frac{U_0}{R_0} \frac{1}{1 - i \frac{\chi_0}{2\ell_0 \omega}} \exp i(\omega t - kz) \approx \frac{U_0}{R_0} \left(1 + i \frac{\chi_0}{2\ell_0 \omega} \right) \exp i(\omega t - kz)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \bar{u}(z, t) = U_0 \exp i \left(\omega t - \frac{\omega}{\chi_0} z \right) \exp \left(-\frac{z}{2\ell_0} \right) \\ \bar{i}(z, t) = \frac{U_0}{R_0} \left(1 + i \frac{\chi_0}{2\ell_0 \omega} \right) \exp i \left(\omega t - \frac{\omega}{\chi_0} z \right) \exp \left(-\frac{z}{2\ell_0} \right) \end{cases}$$

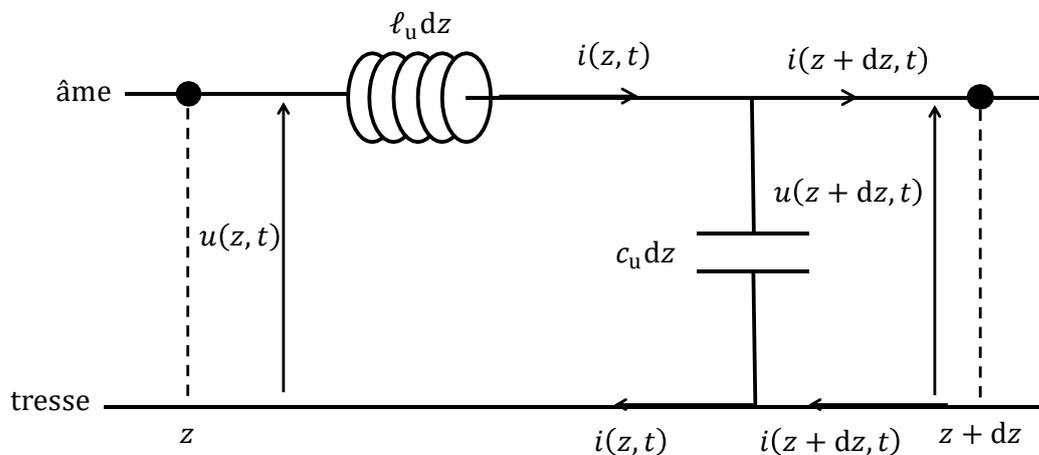
La puissance moyenne transportée par la ligne est donnée par :

$$\mathcal{P}_m(z) = \frac{1}{2} \text{Re} (\bar{u} \bar{i}^*) = \frac{U_0^2}{2R_0} \exp \left(-\frac{z}{\ell_0} \right)$$

La puissance moyenne transportée par la ligne décroît donc exponentiellement sur la distance caractéristique ℓ_0 .

I.B. Câble coaxial

Q7 Le schéma équivalent à la tranche $[z, z + dz]$ est le suivant :



La loi des mailles et la loi des nœuds donnent (question de cours) : $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = -\ell_u \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial z} = -c_u \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$. On en déduit (nouvelle question de cours) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \ell_u c_u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = \ell_u c_u \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{cases}$$

Q8 Les ondes de tension et de courant vérifient l'équation de d'Alembert à une dimension :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

La constante c , homogène à une vitesse est la célérité des ondes électriques le long du câble. Elle s'écrit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\ell_u c_u}}$$

Numériquement, on obtient :

$$c = \frac{1}{\sqrt{32 \cdot 10^{-8} \times 53 \cdot 10^{-12}}} \approx \frac{10^{10}}{\sqrt{36 \times 49}} = \frac{10^{10}}{42} \approx \frac{10^{10}}{40} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette valeur est un peu inférieure à la célérité de la lumière dans le vide : le champ électromagnétique se propage ici dans l'isolant.

Le « délai » Δt_u ou retard linéique est l'inverse d'une vitesse donc on s'attend à ce que

$$c = \frac{1}{\Delta t_u} = \frac{10^9}{4} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

C'est parfaitement cohérent.

Q9 Pour une onde progressive harmonique de tension $\bar{u}(z, t) \propto \exp i(\omega t - kz)$ et de courant $\bar{i}(z, t) \propto \exp i(\omega t - kz)$ se propageant le long du câble, la loi des mailles donne :

$$-ik\bar{u}(z, t) = -i\omega\ell_u\bar{i}(z, t)$$

Par conséquent :

$$\frac{\bar{u}(z, t)}{\bar{i}(z, t)} \stackrel{\text{définition}}{=} Z_0 = \frac{\omega\ell_u}{k} = c\ell_u \stackrel{\text{expression}}{=} \sqrt{\frac{\ell_u}{c_u}}$$

Numériquement, on trouve $Z_0 = \sqrt{\frac{32 \cdot 10^{-8}}{53 \cdot 10^{-12}}} \approx \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times 100 \approx \frac{17}{22} \times 100 \approx 77 \Omega$

La fiche technique donne $Z_0 = 75 \Omega$. C'est cohérent.

Q10 D'après la question Q9, $\bar{u}_+(z, t) = Z_0\bar{i}_+(z, t) = \bar{U}_+ \exp i(\omega t - kz)$. Par conséquent :

$$\bar{i}_+(z, t) = \frac{\bar{U}_+}{Z_0} \exp i(\omega t - kz)$$

L'onde réfléchie de tension est de la forme $\bar{u}_-(z, t) = \bar{U}_- \exp i(\omega t + kz)$. La loi des mailles donne pour l'onde réfléchie : $\bar{u}_-(z, t) = -Z_0 \bar{i}_-(z, t)$. Par conséquent :

$$\bar{i}_-(z, t) = -\frac{\bar{U}_-}{Z_0} \exp i(\omega t + kz)$$

Ecrivons la condition aux limites en $z = 0$: $\bar{u}_+(0, t) + \bar{u}_-(0, t) = \bar{Z}_e (\bar{i}_+(0, t) + \bar{i}_-(0, t))$.

On en déduit : $\bar{U}_- = \left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right) \bar{U}_+$. On en déduit :

$$\begin{cases} \bar{u}_-(z, t) = \left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right) \bar{U}_+ \exp i(\omega t + kz) \\ \bar{i}_-(z, t) = -\left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right) \frac{\bar{U}_+}{Z_0} \exp i(\omega t + kz) \end{cases}$$

Q11 L'onde de tension résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie s'écrit :

$$\bar{u}(z, t) = \bar{u}_+(z, t) + \bar{u}_-(z, t) = \bar{U}_+ \exp(i\omega t) \left[\exp(-ikz) + \left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right) \exp(ikz) \right]$$

On peut reformuler ce résultat sous la forme :

$$\bar{u}(z, t) = \bar{U}_+ \exp(i\omega t) \left[\exp(-ikz) \underbrace{\left(1 + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right)}_{\frac{2\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0}} + \left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right) \frac{(\exp(ikz) - \exp(-ikz))}{2i \sin(kz)} \right]$$

soit :

$$\bar{u}(z, t) = \bar{U}_+ \left(\frac{2\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0} \exp i(\omega t - kz) + 2i \left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right) \sin(kz) \exp(i\omega t) \right)$$

Posons $\alpha = \arg\left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right)$ et $\beta = \arg\left(\frac{\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0}\right)$. On peut donc reformuler $\bar{u}(z, t)$ ainsi :

$$\bar{u}(z, t) = 2\bar{U}_+ \left| \frac{\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0} \right| \exp i(\omega t - kz + \beta) + 2\bar{U}_+ \left| \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \right| \sin(kz) \exp i\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Supposons pour simplifier (mais cela ne change absolument rien) que $\bar{U}_+ = U_0$ est réel positif. Alors, l'onde de tension réelle s'écrit :

$$u(z, t) = 2U_0 \left| \frac{\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0} \right| \cos(\omega t - kz + \beta) - 2U_0 \left| \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \right| \sin(kz) \sin(\omega t + \alpha)$$

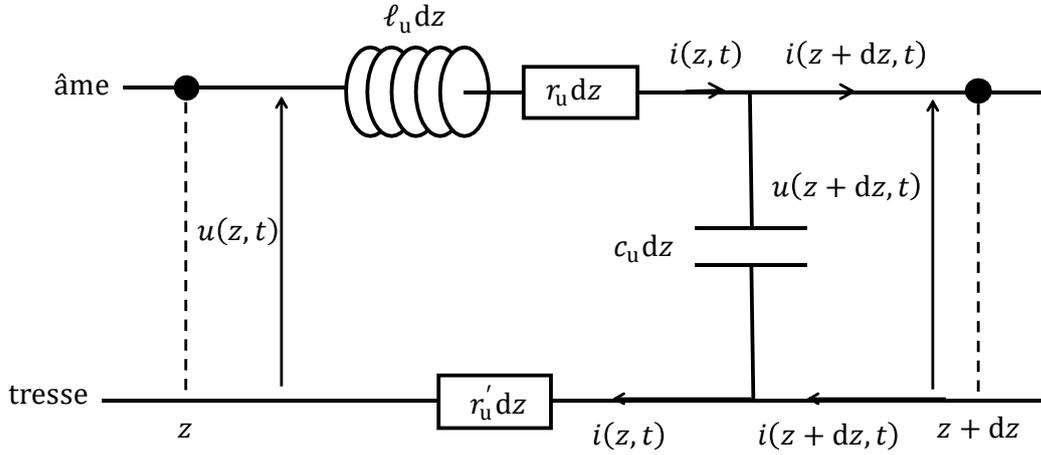
C'est bien la superposition d'une onde progressive et d'une onde stationnaire.

Le taux d'onde stationnaire (TOS) ρ vaut donc :

$$\rho = \left| \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e} \right|$$

On n'a pas d'onde stationnaire, c'est-à-dire uniquement une onde progressive (autrement dit, aucune réflexion sur l'impédance terminale \bar{Z}_e si $\rho = 0$, c'est-à-dire si $\bar{Z}_e = Z_0$).

Q12 Le modèle incluant les pertes résistives dans l'âme et la tresse est le suivant :



La loi de nœuds est inchangée : $\frac{\partial i}{\partial z} = -c_u \frac{\partial u}{\partial t}$. En revanche la loi des mailles s'écrit maintenant :

$$u(z, t) = \ell_u dz \frac{\partial i}{\partial t} + r_u dz i(z, t) + u(z + dz, t) + r'_u dz i(z, t)$$

soit :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\ell_u \frac{\partial i}{\partial t} - (r_u + r'_u) i(z, t)$$

En procédant comme à la question Q7, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \ell_u c_u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r_u + r'_u) c_u \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r_u + r'_u) c_u \frac{\partial u}{\partial t}$$

Puisque par hypothèse il y a accord avec l'impédance terminale, nous sommes en présence d'une unique onde progressive que l'on peut chercher sous la forme $\bar{u}(z, t) = U_0 \exp i(\omega t - kz)$, l'équation étant linéaire. On en déduit (comme en Q4) la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i(r_u + r'_u) c_u \omega = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \left(\frac{r_u + r'_u}{\ell_u \omega} \right) \right)$$

On suppose que les pertes sont suffisamment faibles pour que $\frac{r_u + r'_u}{\ell_u \omega} \ll 1$. Le vecteur d'onde s'écrit alors :

$$k \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - i \left(\frac{r_u + r'_u}{2 \ell_u \omega} \right) \right)$$

L'onde de tension complexe est donc de la forme :

$$\bar{u}(z, t) = U_0 \exp i \left(\omega t - \frac{\omega}{c} z \right) \exp \left(- \left(\frac{r_u + r'_u}{2\ell_u c} \right) z \right)$$

Le facteur d'atténuation $\exp \left(- \left(\frac{r_u + r'_u}{2\ell_u c} \right) z \right)$ fait donc apparaître une distance δ caractéristique d'atténuation de l'onde de tension, donnée par :

$$\delta = \frac{2\ell_u c}{r_u + r'_u} = 2 \frac{Z_0}{r_u + r'_u}$$

Q13 Numériquement, on trouve : $\delta = \frac{2 \times 75}{12,1} \approx \frac{75}{6} = 12,5$ km.

Cette valeur est très élevée devant la longueur des câbles usuels : l'atténuation est donc très faible dans ce câble haut de gamme.

On évite d'utiliser ce type de câble en très haute fréquence pour deux raisons :

- d'une part, les résistances linéiques de l'âme et de la tresse augmentent avec la fréquence en raison de l'effet de peau ;
- d'autre part, au-delà du GHz, apparaissent d'autres modes de propagation du champ électromagnétiques (non TEM), ce qui provoque de la dispersion modale. Par ailleurs, ces modes de propagation ne sont pas modélisables à l'aide du modèle électrocinétique à constantes réparties étudié ici.

Q14 Il n'y a pas d'onde réfléchi en aval de la dérivation car les deux décodeurs sont adaptés aux câbles utilisés (cf Q11).

Supposons tout d'abord qu'il n'y ait pas d'onde réfléchi dans le domaine $z < 0$ (soit en amont de la dérivation). La tension doit être continue en $z = 0$. Comme les deux câbles sont branchés en parallèle sur le câble source, cela impose $U'_0 = U_0$. D'autre part, la loi des nœuds au niveau de la dérivation impose, les trois ondes étant progressives : $\frac{U_0}{Z_0} = \frac{U'_0}{Z_0} + \frac{U'_0}{Z_0}$ soit : $U_0 = 2U'_0$. Ces deux conditions sont incompatibles : il y a donc forcément une onde réfléchi en amont de la dérivation.

Notons $\bar{u}_r(z \leq 0, t) = \bar{U}_r \exp i(\omega t + kz)$ l'onde réfléchi complexe. Les conditions aux limites en $z = 0$ (continuité de la tension et loi des nœuds) s'écrivent (cf Q10) :

$$\begin{cases} U_0 + \bar{U}_r = U'_0 \\ \frac{U_0 - \bar{U}_r}{Z_0} = 2 \frac{U'_0}{Z_0} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \bar{U}_r = -\frac{U_0}{3} \\ U'_0 = \frac{2U_0}{3} \end{cases}$$

Q15 A priori, on peut penser que les deux propositions sont recevables. En effet, la dérivation pirate entraîne une diminution de l'amplitude du signal reçu par le décodeur D ($U'_0 = \frac{2U_0}{3} < U_0$).

D'autre part, la dérivation provoquant une réflexion, on aura une onde partiellement stationnaire en amont de la dérivation. Calculons le taux d'onde stationnaire ρ comme nous l'avons fait à la question Q11. L'onde de tension totale complexe en amont de la dérivation s'écrit : $\bar{u}(z, t) = U_0 \exp(i\omega t) \left(\exp(-ikz) - \frac{\exp(ikz)}{3} \right)$. Après calcul, on obtient :

$$\bar{u}(z, t) = \frac{2U_0}{3} (\exp i(\omega t - kz) - i \sin(kz) \exp(i\omega t))$$

soit :

$$u(z, t) = \frac{2U_0}{3} (\cos(\omega t - kz) + \sin(kz) \sin(\omega t))$$

Le taux d'onde stationnaire vaut donc $\rho = 1$: la détection du branchement pirate est donc détectable en mesurant ρ .

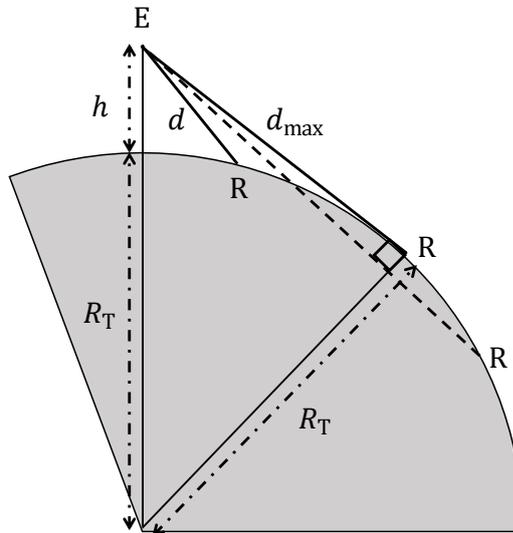
II. La télégraphie sans fil

II.A. Echos ionosphériques

Q16 On voit d'après la figure ci-dessous que la transmission directe n'est possible que si $d \leq d_{\max}$ où $d_{\max} = \sqrt{(R_T + h)^2 - R_T^2} \approx \sqrt{2R_T h}$.

Numériquement, on trouve :

$$d_{\max} \approx \sqrt{2 \times 6400 \times 180} = \sqrt{64 \times 36 \times 100 \times 10} = 480\sqrt{10} \approx 500 \times 3 = 1500 \text{ km}$$



L'expérience de Marconi n'a pu être réalisée par transmission directe.

Q17 Le champ électrique de l'onde incidente s'écrit : $\vec{E}(x, z, t) = E_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_y$ où le vecteur d'onde vaut $\vec{k} = \frac{\omega}{c} (\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z)$. On vérifie que la phase initiale est nulle au point O. On en déduit :

$$\vec{E}(x, z, t) = E_0 \exp i \left(\omega t - \frac{\omega}{c} (x \sin \theta + z \cos \theta) \right) \vec{e}_y$$

Q18 Le champ électrique transmis dans le plasma s'écrit :

$$\vec{E}'(x, z, t) = E'_0 \exp i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{r}) \vec{e}_y = E'_0 \exp i \left(\omega' t - (k'_x x + k'_y y + k'_z z) \right) \vec{e}_y$$

La continuité du champ électrique à l'interface vide-ionosphère (en $z = H$) impose :

$$\omega t - \frac{\omega}{c} (x \sin \theta) = \omega' t - (k'_x x + k'_y y)$$

Pour tout (t, x, y) . On en déduit :

$$\begin{cases} \omega' = \omega \\ k'_x = \frac{\omega}{c} \sin \theta \\ k'_y = 0 \end{cases}$$

NB : Plus rigoureusement, si l'on tient compte de la présence de l'onde réfléchie qui s'écrit

$$\vec{E}_r(x, z, t) = E_r \exp i \left(\omega t - \frac{\omega}{c} (x \sin \theta - z \cos \theta) \right) \vec{e}_y :$$

$$\begin{aligned} E_0 \exp i \left(\omega t - \frac{\omega}{c} (x \sin \theta + L \cos \theta) \right) + E_r \exp i \left(\omega t - \frac{\omega}{c} (x \sin \theta - L \cos \theta) \right) \\ = E'_0 \exp i \left(\omega' t - (k'_x x + k'_y y + k'_z L) \right) \end{aligned}$$

Donc, en divisant par $\omega t - \frac{\omega}{c} (x \sin \theta + L \cos \theta)$, on obtient :

$$\begin{aligned} E_0 + E_r \exp i \left(2 \frac{\omega}{c} L \cos \theta \right) \\ = E'_0 \exp i \left((\omega' - \omega) t - \left(\left(k'_x - \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) x + k'_y y + \left(k'_z - \frac{\omega}{c} \cos \theta \right) L \right) \right) \end{aligned}$$

On retrouve bien les trois conditions obtenues ci-dessus.

Q19 La relation de dispersion du plasma ionosphérique s'écrit : $k^2 = k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. On en déduit :

$$k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta = \frac{\omega^2 \cos^2 \theta - \omega_p^2}{c^2}$$

L'onde transmise ne peut pas se propager dans le plasma si $k_z^2 < 0$ (on a alors une onde évanescente), c'est-à-dire si :

$$\omega < \frac{\omega_p}{\cos \theta}$$

La pulsation limite vaut donc $\omega_\ell = \frac{\omega_p}{\cos \theta}$.

Q20 Un petit dessin permet de se convaincre que $\tan \theta = \frac{d}{2H} = 10$. On en déduit :

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 100 \cos^2 \theta, \text{ soit : } \cos^2 \theta = \frac{1}{101} \approx \frac{1}{100}. \text{ Donc : } \cos \theta \approx 0,1.$$

Par conséquent, $f_\ell = \frac{f_p}{\cos \theta} \approx 10 \text{ MHz}$.

On en déduit que Marconi a utilisé une onde radio de fréquence 10 MHz environ pour réaliser son expérience, et que la transmission transatlantique a été rendue possible grâce à un unique écho ionosphérique.

II.B. L'ionosphère

Q21 Il s'agit d'une question de cours. Les hypothèses sont les suivantes :

- ions fixes car beaucoup plus massifs que les électrons ;
- force magnétique négligeable devant la force électrique due à l'onde car $\frac{v_B}{E} \approx \frac{v}{c} \ll 1$ (plasma non relativiste) ;
- dissipation négligeable car plasma peu dense ;
- Poids et champ magnétique terrestre négligeables.

La 2nde loi de Newton appliquée à un électron soumis au champ de l'onde s'écrit donc :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

On obtient donc, en notation complexe : $\vec{v} = i \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}$. Or, $\vec{j} = -ne\vec{v}$. Par conséquent :

$$\vec{j} = -i \frac{ne^2}{m_e \omega} \vec{E}$$

La conductivité complexe vaut donc : $\bar{\gamma}(\omega) = -i \frac{ne^2}{m_e \omega}$. Elle s'exprime en $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$.

Q22 L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, pour une OPPH* proportionnelle à $\exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$
 $\text{rot}(\vec{B}) = -i\vec{k} \times \vec{B} = \mu_0 \bar{\gamma}(\omega) \vec{E} + i\mu_0 \varepsilon_0 \omega \vec{E}$. On prend le rotationnel de cette expression et on exploite l'équation de Maxwell-Thomson ($\text{div}(\vec{B}) = -i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$) ainsi que l'équation de Maxwell-Faraday. On obtient :

$$k^2 \vec{B} = -i\mu_0 \omega \bar{\gamma}(\omega) \vec{B} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B}$$

soit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \frac{ne^2}{m_e} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

où l'on reconnaît la pulsation plasma : $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e}}$.

Q23 La puissance moyenne volumique reçue par le milieu de la part de l'onde est donné par :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{vol}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{|\vec{E}|^2}{2} \text{Re}(\bar{\gamma}(\omega)) = 0$$

Le milieu n'absorbe donc aucune puissance moyenne.

Dans le cas d'un écho ionosphérique, le vecteur d'onde est imaginaire pur. Si l'on note \vec{u}_X la direction de propagation, $\vec{k} = \pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} \vec{u}_X$. Le champ électrique de l'onde dans le plasma s'écrit donc :

$$\vec{E}(X, t) = \vec{E}_0 \exp i \left(\omega t - \left(\pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} X \right) \right) = \vec{E}_0 \exp \left(\pm \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} X \right) \exp(i\omega t)$$

On voit qu'il faut choisir $\vec{k} = -i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} \vec{u}_X$ pour que le champ ne diverge pas. Par conséquent :

$$\vec{E}(X, t) = \vec{E}_0 \exp \left(- \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} X \right) \exp(i\omega t)$$

Le champ magnétique complexe s'écrit donc :

$$\vec{B}(X, t) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}(X, t)}{\omega} = -i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c\omega} \exp \left(- \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} X \right) \exp(i\omega t) \vec{u}_X \times \vec{E}_0$$

Par conséquent, le vecteur de Poynting moyen s'écrit :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left(\vec{E} \times \vec{B}^* \right) = \frac{|E_0^2| \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{2\mu_0 c\omega} \exp \left(-2 \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} X \right) \operatorname{Re}(i) \vec{u}_X = \vec{0}$$

Aucune puissance moyenne ne se propage donc dans le plasma pour $\omega < \omega_p$.

Puisqu'il n'y a ni dissipation ni propagation de puissance dans le plasma, toute la puissance de l'onde incidente doit donc être réfléchiée vers le vide.

Q24 Les fréquences utilisées pour la transmission radio et TV vont de 100 MHz à 1 GHz, voire 10 GHz. Ces signaux peuvent donc se propager dans l'ionosphère et être réémis depuis des satellites situés en haute altitude. Plus la fréquence est élevée, moins il y a de dispersion dans l'ionosphère.

Inconvénients d'utiliser des hautes fréquences : nécessité de développer des systèmes d'émission/réception hyperfréquences ?