

Mesures de champ magnétique

I.- Balance de Cotton

□ 1.-

À l'équilibre réalisé, le système formé des parties mobiles n'étant soumis qu'à son poids, qui s'applique en G et la réaction de l'axe en O , le théorème du moment cinétique appliqué dans le référentiel du laboratoire galiléen s'écrit :

$$\vec{OO} \wedge \vec{R} + \vec{OG} \wedge \vec{P} = \vec{0},$$

on en déduit que \vec{OG} est colinéaire à \vec{u}_z , donc G est sur la verticale passant par O , pas nécessairement en O .

La première question contenait donc une erreur, puisqu'elle demandait de montrer que le barycentre était en O .

□ 2.- La force de Laplace qui s'exerce sur un élément $d\vec{\ell} = R d\theta \vec{u}_\theta$ est $d\vec{F}_l = id\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ est dirigée selon \vec{u}_r , son moment par rapport à O est nul.

□ 3.-

$$d\vec{\mathcal{M}}_l = \vec{OM} \wedge (id\vec{\ell} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{\mathcal{M}}_l = \int_{d_1+\ell/2}^{d_1-\ell/2} x \vec{u}_x \wedge (idx \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z B)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_l = -\vec{u}_z iB \left[\frac{x^2}{2} \right]_{d_1+\ell/2}^{d_1-\ell/2}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_l = -\vec{u}_z \frac{iB}{2} (2d_1)(-\ell),$$

finalement :

$$\vec{\mathcal{M}}_l = iB d_1 \ell \vec{u}_z.$$

À l'équilibre la somme des moments est nulle, on en déduit : $iB d_1 \ell = mg d_2$, soit

$$B = \frac{mg d_2}{i \ell d_1}.$$

□ 4.-

L'incertitude sur B est reliée à celle sur m par la relation :

$$\delta B = \delta m \frac{g d_2}{i \ell d_1}.$$

Numériquement, on établit $\delta B = 1.10^{-3} \text{T}$, cette valeur est en ordre de grandeur 10 fois plus grande que le champ magnétique terrestre, mais 1000 fois plus faible que le champ créé par un aimant permanent en fer, néodyme et cobalt.

II.- Utilisation d'une boussole

II.A.- Étude générale

□ 5.- J'applique le théorème du moment cinétique à l'aiguille aimantée dans le référentiel du laboratoire :

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \vec{u}_z = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B},$$

soit en projection sur \vec{u}_z ,

$$J \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\mathcal{M} B \sin \alpha.$$

À l'équilibre, $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0$, donc $\sin \alpha = 0$, soit $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$.

La position stable est $\alpha = 0$, lorsque $\vec{\mathcal{M}}$ et \vec{B} sont colinéaires et de même sens. Pour α petit, $\sin \alpha \simeq \alpha$, l'équation différentielle vérifiée par α est donc :

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{\mathcal{M} B}{J} \alpha = 0$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + K B \alpha = 0.$$

La solution de cette équation est :

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\sqrt{K B} t).$$

□ 6.- Le champ magnétique uniforme créé dans le volume intérieur d'un solénoïde infini est $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$, où n est le nombre de spires par unité de longueur. L'unité de n est donc m^{-1} , ainsi la seule expression de B_0 , parmi les expressions proposées, qui a la même dimension est :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

□ 7.- Le champ magnétique en un point repéré par $x = XR$ est la somme des champs magnétiques créés par chacune des deux bobines, d'après l'expression fournie, on obtient :

$$\vec{B}(X) = N \vec{B}_0 \left[\frac{8}{5\sqrt{5}} \right] \left[2 - 2 \frac{144}{125} X^4 \right] + o(X^4),$$

soit $\vec{B}(X) = \vec{B}(0) \left[1 - \frac{144}{125} X^4 \right].$

Soit X_{max} la valeur de X telle que $\frac{B(X_{max}) - B(0)}{B(0)} = \frac{2}{100}$.

Comme $\frac{B(X_{max}) - B(0)}{B(0)} = \frac{144}{125} X_{max}^4$, on calcule $X_{max} = \pm 0,4$, et on en conclut que la plage des valeurs de x telle que le champ magnétique ne varie pas de plus de 2% de sa valeur maximale en $x = 0$ est :

$$-0,4R < x < 0,4R.$$

La valeur du champ magnétique en O est :

$$B(0) = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ T}.$$

□ 8.- Comme $\omega = \sqrt{K B}$, $K = \frac{\omega^2}{B}$, soit

$$K = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{1}{B}.$$

Numériquement : $K = 3,710^5 \text{ s}^{-2} \cdot \text{T}^{-1}$.

II.B.- Applications au champ magnétique terrestre

□ 9.- L'énoncé parle de pôle nord magnétique N_m et de pôle sud magnétique S_m , or ce sont les pôles géographiques, ce sont les vrais pôles sud et nord respectivement de l'aimant qui crée le champ magnétique terrestre. Ils sont distincts des pôles Nord et Sud situés sur l'axe de rotation de la Terre, la différence de position étant liée à la déclinaison magnétique.

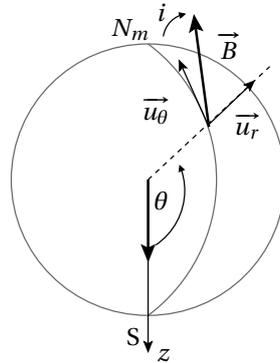


FIGURE 1

D'après le schéma, on peut relier $\tan i$ à B_r et B_θ soit :

$$\tan i = \frac{B_r}{B_\theta},$$

soit $\tan i = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ et $\tan \theta = \frac{2}{\tan i}$.

Numériquement, $\theta = 44$ deg ou $\theta = 136$ deg.

La latitude λ de Paris donnée dans l'énoncé est donnée dans le repère lié à l'axe de rotation de la Terre, soit $\lambda = \theta - 90 + \delta$, où δ est la déclinaison magnétique. Je garde donc la solution $\theta = 136$ deg qui donne $\theta - 90 = 46$ deg soit une déclinaison magnétique $\delta = 3$ deg, puisque $\lambda = 49$ deg d'après l'énoncé.

□ 10.- Lorsque l'axe de rotation est vertical, la boussole oscille avec une pulsation reliée à la composante horizontale B_θ du champ magnétique soit $\omega = \sqrt{KB_\theta}$. De plus $B_\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin \theta}{4\pi R_T^3}$, soit :

$$\mathcal{M} = \frac{\omega^2 4\pi R_T^3}{K \mu_0 \sin \theta},$$

et $\|\vec{B}\| = (1 + \tan^2 i)^{0.5} B_\theta$. Numériquement : $\mathcal{M} = 8.10^{22}$ A·m², ce qui est conforme à l'estimation habituelle du moment magnétique terrestre ; et $\|\vec{B}\| = 4,6.10^{-5}$ T.

III.- Utilisation d'une sonde à effet Hall

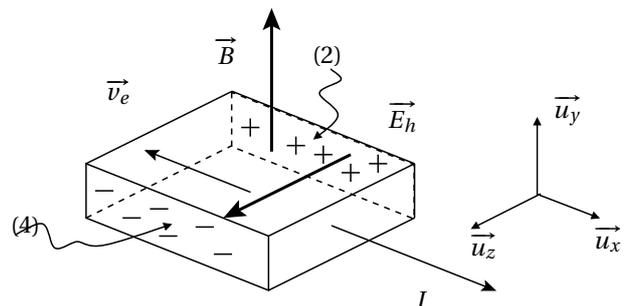
□ 11.- $\vec{j} = -ne\vec{v}$, soit $\|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{j}\|}{ne}$, et numériquement $\|\vec{v}\| = 3,2.10^4$ m·s⁻¹.

□ 12.-

La force magnétique subie par l'électron est :

$$\vec{f} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

en régime permanent les électrons ont une vitesse \vec{v} opposée au vecteur densité de courant qui est selon \vec{u}_x , ainsi la force magnétique qu'ils subissent est selon \vec{u}_z , les électrons se déplacent vers la face (4). La face (4) se charge négativement, la face (2) positivement.



□ 13.-

J'applique le PFD à un électron dans le référentiel de la plaquette de semi-conducteur supposé galiléen, en régime permanent.

$$m_e \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = -e\vec{E}_h - e\vec{v} \wedge \vec{B} - eE_x \vec{u}_x - \frac{m_e}{\tau} \vec{v}$$

$$\vec{0} = -e\vec{E}_h - e\vec{v} \wedge \vec{B} - eE_x \vec{u}_x - \frac{m_e}{\tau} \vec{v},$$

en régime permanent, \vec{v} est colinéaire à \vec{u}_x , en projetant sur \vec{u}_z le PFD, on obtient :

$$0 = -e\vec{E}_h \cdot \vec{u}_z - e\nu B (\vec{u}_x \vec{u}_y) \cdot \vec{u}_z$$

$$0 = -eE_h - e\nu B$$

$$\boxed{\vec{E}_h = -\nu B \vec{u}_z = \frac{I_0}{neac} B \vec{u}_z.}$$

Le champ \vec{E}_h est un champ électrique permanent, on en déduit :

$$V_2 - V_4 = \int_2^4 \vec{E}_h \cdot \vec{u}_z dz$$

$$V_2 - V_4 = E_h a$$

$$u_h = V_4 - V_2 = -E_h a = \frac{-I_0}{nec} B.$$

Finalement :

$$\boxed{\gamma = \frac{u_h}{B} = \frac{-I_0}{nec}.}$$

Numériquement : $\gamma = -95 \text{ V} \cdot \text{T}^{-1}$.

□ 14.-

La loi des nœuds donne $I_0 = i_R - I_C$, avec $i_R = \frac{u}{R}$, soit $R = \frac{U}{I_0 + I_C}$. Numériquement : $R = 500 \Omega$.

Le dipôle ainsi constitué est bien une source de courant idéale, car le courant I_0 ne dépend pas de la tension à ses bornes, puisque la tension $u = V_s - V_c = 5 \text{ V}$ est imposée par le composant dont on ne nous dit rien...

□ 15.-

Les faces (2) et (3) de la plaquette semi-conductrice seraient placées au même potentiel, celui de référence du circuit, et le courant dans la plaquette ne serait pas colinéaire à \vec{u}_x .

□ 16.-

Grâce à ce nouveau dispositif, le problème de masse est résolu. L'ALI est bouclé sur son entrée inverseuse, il peut fonctionner de façon stable. Il fonctionnera linéairement si $|u_s| < V_{sat}$. On se place dans ce cas pour la suite.

Le système d'équations que vérifie V^+ , V^- et V_s est :

$$\left\{ \begin{array}{l} V^+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_4 \\ \frac{V_2 - V^-}{R_1} = \frac{V^- - V_s}{R_2} \\ V^+ = V^- \end{array} \right.$$

On déduit : $V_s = (V_4 - V_2) \frac{R_2}{R_1}$, ainsi la tension à mesurée est amplifiée si $\frac{R_2}{R_1} > 1$.

□ 17.-

$R_e = R_1 + R_2$, est non infinie, ainsi des électrons sortent ou rentrent dans la plaquette par les faces (2) et (4), il y a un courant selon \vec{u}_z .

□ 18.-

$R_e = \infty$ puisque l'ALI est idéal, donc le courant qui rentre dans l'entrée inverseuse est nul.

Comme le courant d'entrée sur l'entrée non inverseuse est nul, les résistances R et R' forme un diviseur de tension, soit $V_e = V_s \frac{R}{R + R'}$, d'où :

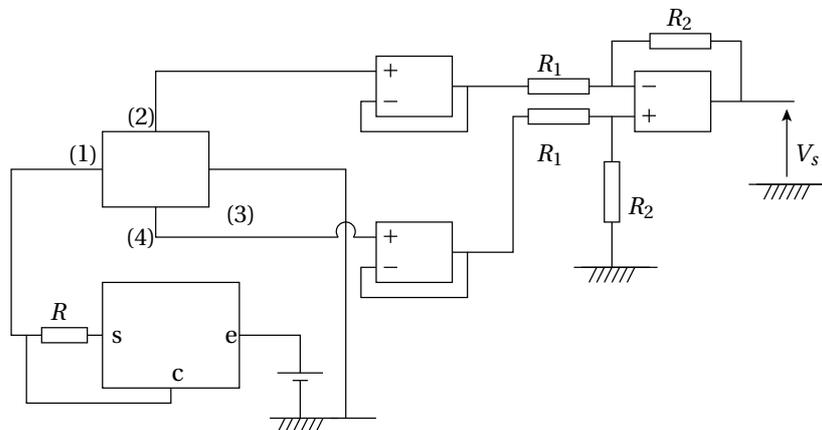
$$A = \frac{u_s}{u_e} = 1 + \frac{R'}{R}$$

□ 19.-

Cette question est étrangement posée.

En choisissant R infinie et R' nulle, le montage de la figure 6 est celui d'un suiveur de tension qui permet de palier aux problèmes d'adaptation d'impédance.

□ 20.-



□ 21.-

$V_4 - V_2 = V_s \frac{R_2}{R_1}$, soit $V_4 - V_2 = 0,2 \text{ V}$.

Comme $U_h = \gamma B$, on en déduit $B = -2,1 \cdot 10^{-4} \text{ T}$.

J'ai donc une incohérence de signe. La tension u_s devrait être négative ?

□ 22.-

La distribution de courant source du champ magnétique \vec{B}_0 est une nappe de courant de densité $\vec{j} = \frac{I_0}{ac} \vec{u}_x$ entre les plans de cote $y = c/2$ et $y = -c/2$.

Je cherche le champ magnétique créé en un point $M(x, y, z)$ quelconque de l'espace.

Étude des symétries :

Le plan Π_1 défini par $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant. Donc $\vec{B}(M) = B(x, y, z) \vec{u}_z$.

Dépendance par rapport aux variables d'espace :

La distribution est invariante par translation selon \vec{u}_x et \vec{u}_z , ainsi :

$$\vec{B}(M) = B(y) \vec{u}_z.$$

J'utilise l'équation de Maxwell Ampère dans la plaquette :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} \vec{u}_x = \mu_0 \frac{I_0}{ac} \vec{u}_x,$$

après intégration $B(y) = \mu_0 \frac{I_0}{ac} y + K$, or $B(y=0) = 0$ car les plans $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ sont plans de symétrie, donc $K = 0$.

Finalement :

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \frac{I_0}{ac} y \vec{u}_z.$$

La valeur maximale de B_0 est obtenue pour $y = c/2$, soit $B_0 = \mu_0 \frac{I_0}{2a} = 2.10^{-6}$ T.

Ce champ n'est pas totalement négligeable dans la mesure du champ magnétique terrestre qui vaut environ 5.10^{-5} T.

IV.- Utilisation d'une magnétorésistance

□ 23.-

Le dispositif défini est invariant par translation selon \vec{u}_z et rotation autour de Oz , donc le potentiel V ne dépend que de r .

Comme le conducteur est non chargée, le potentiel électrique vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0.$$

Comme $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right)$, on déduit $r \frac{dV}{dr} = K_1$.

Soit $V(r) = K_1 \ln r + K_2$, à l'aide des conditions limites en $r = r_1$ et $r = r_2$, on établit :

$$V(r) = V_1 + (V_1 - V_2) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_1/r_2)}.$$

Et le champ électrique entre les cylindres de rayon r_1 et r_2 :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = \frac{V_2 - V_1}{\ln(r_1/r_2)} \frac{1}{r} \vec{u}_r.$$

□ 24.-

Le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel de la magnétorésistance qui est galiléen s'écrit, en "régime permanent" :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = -e\vec{E} - \lambda \vec{v} - e\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Avec $\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta$, le pfd projeté successivement sur \vec{u}_r et \vec{u}_θ donne le système :

$$\begin{cases} -eE_r - \lambda v_r - eBv_\theta = 0 \\ -\lambda v_\theta + eBv_r = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} v_\theta = \frac{-e^2 B}{\lambda^2 + e^2 B^2} E \\ v_r = \frac{-\lambda e}{\lambda^2 + e^2 B^2} E \end{cases}$$

et $\vec{j} = -ne\vec{v}$.

□ 24.-

Le courant I est le flux du vecteur densité de courant électrique à travers le cylindre de hauteur h et de rayon r :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h j_r r dz d\theta$$

$$I = hr2\pi \frac{\lambda e}{\lambda^2 + e^2 B^2} \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_2/r_1) ne},$$

soit :

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{(\lambda^2 + e^2 B^2) \ln(r_2/r_1)}{2\pi nh\lambda e^2}.$$

Quand $B = 0$, $R = R_0 = \frac{\lambda \ln(r_2/r_1)}{2\pi nh e^2}$, et

$$\frac{R - R_0}{R_0} = \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}.$$

Numériquement : $\frac{R - R_0}{R_0} = 7,9 \cdot 10^{-11}$, et $R_0 = 112 \Omega$.

Cette variation relative de résistance est vraiment très faible, et probablement très difficile à déceler.