

# La mission spatiale Rosetta

Mines 2017 PSI - II

## I. — Étude de la comète 67P Churyomov - Gerasimenko

□ 1 –  $\vec{OM} = r \vec{u}_r$  avec  $r = C^{te}$ ;  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$ ;  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$ . Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :  $m(r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r) = -\frac{GmM_\odot}{r^2} \vec{u}_r$ , soit  $\ddot{\theta} = 0$  et  $\dot{\theta}^2 r = \frac{GM_\odot}{r^2}$ .

Or  $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ , soit  $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_\odot}}$ . Pour Chury, en remplaçant  $r$  par  $a$ ,  $T = 6,5$  ans.

### Remarque

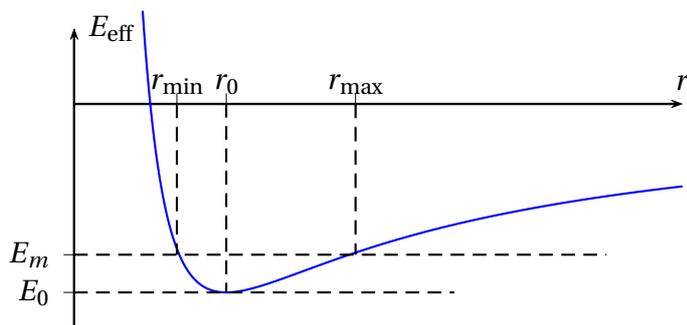
Intérêt de donner  $2\pi a$  plutôt que  $a$ ?

□ 2 –  $\vec{\sigma}_S = \vec{r} \wedge m \vec{v}$ .  $\frac{d\vec{\sigma}_S}{dt} = \vec{v} \wedge m \vec{v} + \vec{r} \wedge \left(-\frac{GmM_\odot}{r^3} \vec{r}\right) = 0$  (produits vectoriels entre vecteurs parallèles).  $\vec{\sigma}_S$  est donc constant et  $\vec{r}$  est perpendiculaire à ce vecteur constant, la trajectoire est donc plane dans un plan perpendiculaire à  $\vec{\sigma}_S$ .

$$\vec{\sigma}_S = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2\dot{\theta} \end{pmatrix} \text{ de norme } mr^2\dot{\theta} \text{ et donc } C = r^2\dot{\theta}$$

□ 3 –  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GmM_\odot}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM_\odot}{r}$  soit

$$E_{\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM_\odot}{r}$$



□ 4 – La trajectoire circulaire correspond à  $r = C^{te}$ , le minimum de la courbe  $E_{\text{eff}}(r)$ .

$$\frac{dE_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{GmM_\odot}{r^2} = 0, \text{ soit } r_0 = \frac{C^2}{M_\odot G}. E_c(r_0) = \frac{mC^2}{2r_0^2} = \frac{GmM_\odot}{2r_0} = -\frac{1}{2}E_p(r_0) \text{ (le terme en } \dot{r}$$

disparait puisque  $r = C^{te}$ ), et  $E_0 = -\frac{GmM_\odot}{2r_0}$ .

□ 5 – D'après la figure 1,  $r_{\min} = a(1 - e)$  et  $r_{\max} = a(1 + e)$ . Pour ces deux valeurs de  $r$ , le terme en  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$  est nul et  $E_m = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM_\odot}{r}$ , ce qui donne l'équation du second degré en  $r$

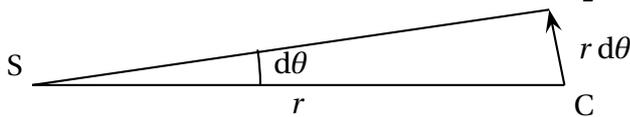
$$E_m r^2 + GmM_\odot r - \frac{1}{2}mC^2 = 0$$

de discriminant  $\Delta = (GmM_\odot)^2 + 2E_m mC^2$ . Ce discriminant est positif si  $E_m > -\frac{1}{2m} \left( \frac{GmM_\odot}{C} \right)^2$ . En remplaçant  $C^2$  par  $r_0 M_\odot G$  (d'après la question précédente), on obtient  $E_m > -\frac{1}{2} \frac{GmM_\odot}{r_0} = E_0$ , ce qui est cohérent avec la courbe.

Les racines sont  $r = \frac{-GmM_\odot \pm \Delta}{2E_m}$ . En identifiant avec les expressions de  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$ , cela donne  $a = \frac{-mM_\odot}{2E_m}$  (on retrouve la même relation que pour la trajectoire circulaire en remplaçant le rayon par le demi grand axe) et  $e^2 - 1 = \frac{2E_m C^2}{mM_\odot^2 G^2}$  soit

$$e^2 - 1 = \frac{C^2}{2E_m a^2}$$

□ 6 – La surface balayée pendant  $dt$  est de  $\frac{1}{2} \times r \times (r d\theta)$ ,



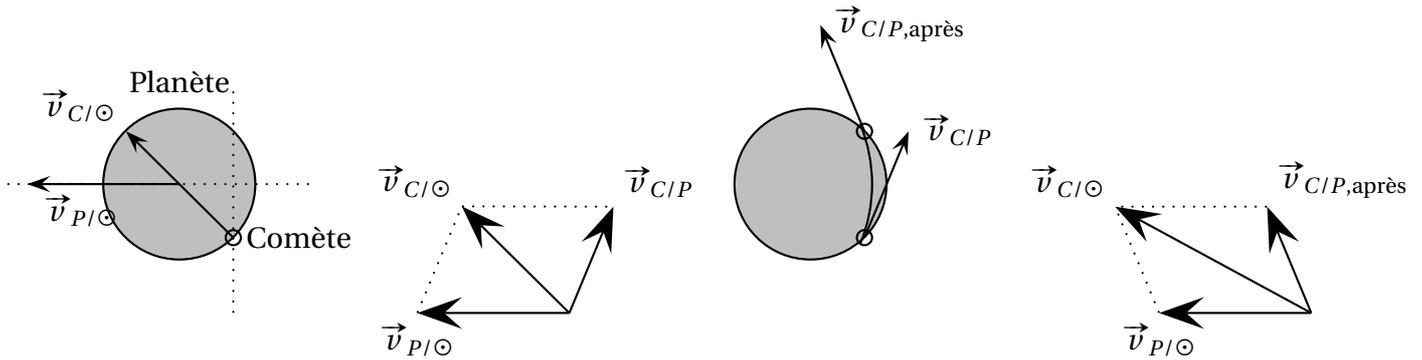
soit une vitesse aréolaire de  $\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} = C^{te}$ . Cette loi est la deuxième loi de Kepler. On intègre l'équation précédente sur une période  $\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{CT}{2}$ . On utilise le résultat de la question précédente pour  $1 - e^2$ , ce qui donne

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{M_\odot G}$$

soit une nouvelle fois la même relation que pour la trajectoire circulaire en remplaçant le rayon par le demi grand axe.

□ 7 – L'assistance gravitationnelle est l'utilisation de l'attraction d'une planète pour modifier la trajectoire d'un engin spatial. Voir l'animation de Geneviève Tulloue : [www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Meca/Planetes/assist\\_grav.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Planetes/assist_grav.php)

L'objectif est d'utiliser ce phénomène pour économiser le carburant. Dans le schéma ci-dessous, le cercle représentant la planète est celui de la zone d'action gravitationnelle de celle-ci, zone dans laquelle on peut négliger l'influence du soleil. On suppose que la durée du transit dans cette zone est faible de sorte que la vitesse de la planète est inchangée durant le transit. La loi de composition des vitesses donne :  $\vec{v}_{C/\odot} = \vec{v}_{C/P} + \vec{v}_{P/\odot}$ . On dessine ce qui se passe avant l'entrée dans la zone, puis après la sortie de cette zone.



direction du soleil

Référentiel soleil  
avant

Réf. soleil →  
Réf. planète

Déviaton  
dans réf. planète

Réf. planète →  
Réf. soleil

$|\vec{v}_{C/P}|$  n'a pas changé par conservation de l'énergie, l'angle  $(\vec{v}_{P/☉}, \vec{v}_{C/P})$  s'est refermé,  $|\vec{v}_{C/☉}|$  a donc augmenté.

## II. — Étude de la chevelure et de la queue de la comète

### II.A. — Taille critique d'un grain dans la chevelure

□ 8 – Par définition le flux du vecteur de Poynting à travers une surface est la puissance traversant cette surface. On effectue une analyse dimensionnelle (la pression est une énergie volumique : cf.

$$\delta W = -P dV), [P] = \frac{[\text{énergie}]}{L^3} = \frac{[\Pi]^\alpha}{[c]^\beta} = \frac{[\text{énergie}]^\alpha T^\beta}{L^\beta L^{2\alpha}}, \text{ soit } \alpha = 1 \text{ et } \beta = 1.$$

On peut interpréter cette pression par analogie avec celle d'un gaz comme résultant du transfert de quantité de mouvement des photons.

#### Remarque

On peut envisager plusieurs interprétations ...

□ 9 – Question non comprise : pour moi la définition de  $B$  est celle du vecteur de Poynting (au problème vectoriel près).  $F_r = \pi R^2 \frac{B}{c}$ , avec  $L_\odot = 4\pi r^2 B$ .

□ 10 – D'après le théorème de Gauss, une répartition de masse à symétrie sphérique se comporte à l'extérieur comme une masse ponctuelle placée au centre.  $\vec{g} = -\frac{GM_\odot}{r^2} \vec{u}_r$ , soit  $F_g = \frac{GmM_\odot}{r^2}$ .

$$v = \frac{F_g}{F_r} = \frac{GmM_\odot 4\pi c}{\pi R^2 L_\odot} = \frac{16\pi GM_\odot R \rho c}{3L_\odot}. \text{ Ce rapport est indépendant de la distance au soleil.}$$

□ 11 – On prend pour valeur critique  $v = 1$ , soit  $R_c = \frac{3L_\odot}{16\pi GM_\odot \rho c} = 0,2 \mu\text{m}$ . Pour  $R \gg R_c$ , c'est la force de gravitation qui prédomine, les particules ayant quittées la comète avec une vitesse relative quasi nulle vont donc suivre la même trajectoire. Pour  $R < R_c$ , la force de radiation repousse les particules vers l'extérieur de la trajectoire. En absence de queue ionique (à l'opposé de la direction du soleil), on ne peut être très précis : le soleil est en haut de la photo. La traînée de poussière à droite provient d'un précédent passage.

## II.B. — Effet Poynting-Robertson

□ 12 –  $L_{\text{grain}} = B\pi R^2 = \frac{L_{\odot}\pi R^2}{4\pi r^2} = L_{\odot} \left(\frac{R}{2r}\right)^2 = 0,04\text{W}.$

□ 13 – À  $t$ , on considère un grain qui, à  $t + dt$ , a perdu la masse effective.

$\vec{\sigma}(t) = \vec{\sigma}_{\text{grain}}(t); \vec{\sigma}(t + dt) = \vec{\sigma}_{\text{grain}}(t + dt) + \vec{r} \wedge (dm_{\gamma} \vec{v}), \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = 0$  (cf. question 2) soit

$\frac{d\vec{\sigma}_{\text{grain}}}{dt} = \vec{r} \wedge (-dm_{\gamma} \cdot \vec{v}). dm_{\gamma} = \frac{L_{\text{grain}} dt}{c^2} = L_{\odot} \left(\frac{R}{2rc}\right)^2.$  En reportant dans la dérivé de  $\vec{\sigma} = \mathcal{L} \vec{u}_z$ , on retrouve bien

$$\dot{\mathcal{L}} = -\left(\frac{R}{2rc}\right)^2 \frac{L_{\odot}}{m} \mathcal{L}$$

### Remarque

Je ne comprend pas ce qu'est cette masse effective mais comme le résultat est donné, je suis capable de le trouver!  $m_{\gamma}$  ressemble à la « masse » d'un photon de quantité de mouvement  $E_{\gamma}/c$  et non  $m_{\gamma}v$ .

□ 14 – Pour un mouvement circulaire  $v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r}}$  d'après la question 1.

Soit  $\mathcal{L} = mvr = m\sqrt{M_{\odot}Gr}$ , soit  $\frac{d\mathcal{L}}{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \frac{dr}{r} = -\left(\frac{R}{2rc}\right)^2 \frac{L_{\odot}}{m} dt$  ou encore  $\frac{1}{2} r dr = -\left(\frac{R}{2c}\right)^2 \frac{L_{\odot}}{m} dt$  qui s'intègre, entre  $\{r, t = 0\}$  et  $\{r = 0, t = t_{\odot}\}$ , en  $\frac{1}{4} r^2 = \left(\frac{R}{2c}\right)^2 \frac{L_{\odot}}{m} t_{\odot}$ , soit  $t_{\odot} = \frac{4\pi\rho r^2 c^2 R}{3L_{\odot}}$

□ 15 –  $R \approx 100\text{m}$

### Remarque

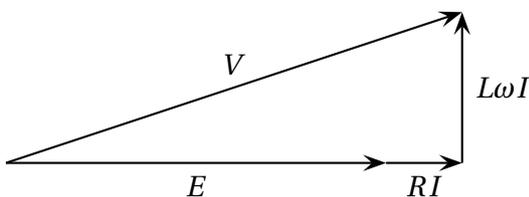
Il y a une erreur d'un facteur 100 sur la distance de Mars.

## III. — Étude de la motorisation de la foreuse du robot Philæ

### III.A. — Essais préalables

□ 16 –  $f = 4 \times 1500 \div 60 = 100\text{Hz}$

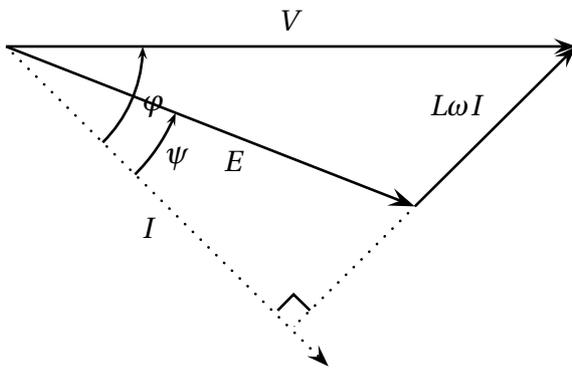
□ 17 –  $E + RI = 62,5\text{V}; L\omega I = \sqrt{V^2 - (E + RI)^2} = 35\text{V}$ , soit  $L = 0,3\text{mH}.$



□ 18 –  $\Phi_0$  s'exprime en Wb et est la valeur efficace du flux du rotor dans un bobinage du stator. Elle dépend du bobinage du stator (section, nombre de spires), du champ créé par le rotor donc celui de l'aimant permanent.  $E = \Phi_0\omega = \Phi_0 p\Omega$  soit  $A = p\Phi_0$ .

Dans l'essai 1 à vide,  $E = V$ ,  $A = 0,36\text{Wb}.$

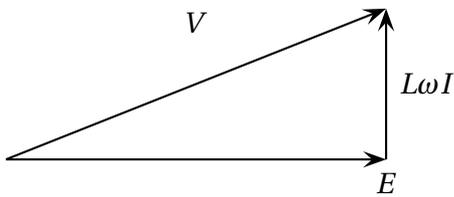
□ 19 – Les projections de  $V$  et  $E$  sur  $I$  sont identiques :  $V \cos\varphi = E \cos\psi.$



□ 20 –  $P = VI \cos \varphi = EI \cos \psi$ . Il y a deux bobinages (introduction partie III, « assimilé à une machine synchrone diphasée ») et donc  $P_m = 2P$ .

□ 21 –  $P_m = C\Omega$  soit  $C = 2AI \cos \psi$ . Pour maximiser le couple, on peut jouer sur l'angle  $\psi$ . Le couple est maxi pour  $\psi = 0$  et vaut  $C_{\max} = 2AI$ . Le couple ne dépend que du courant comme dans le cas du moteur à courant continu.

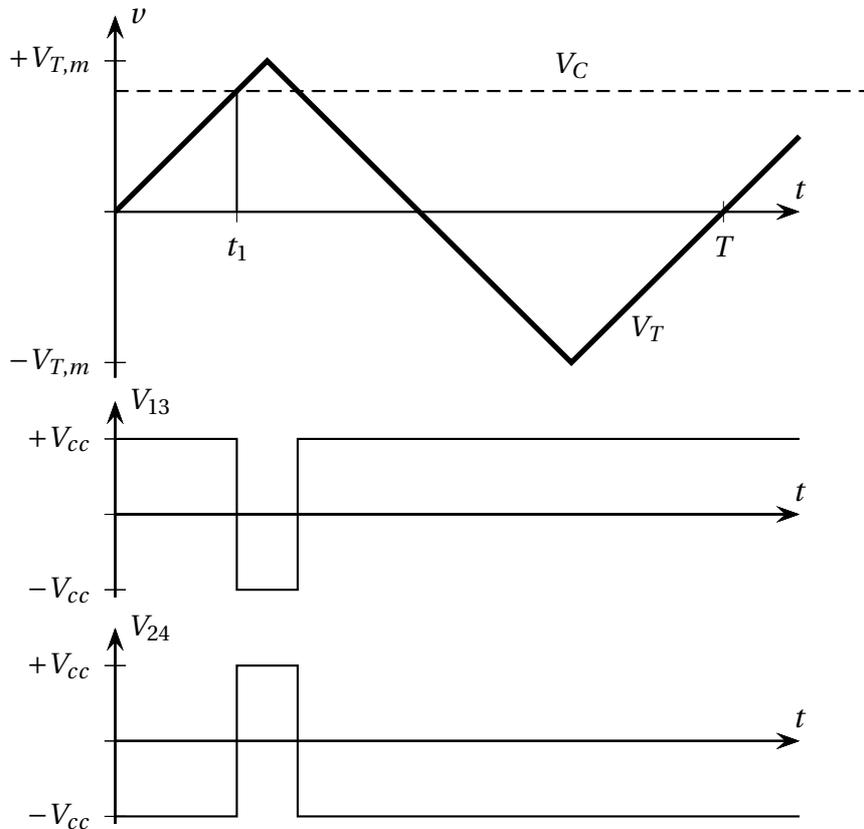
□ 22 –  $C = 111 \text{ Nm}$ .



Par lecture du diagramme :  $V = \sqrt{E^2 + (L\omega I)^2} = 64 \text{ V}$ ;  $\tan \varphi = \frac{L\omega I}{E}$ , soit  $\varphi = 27^\circ$ .

### III.B. — Étude simplifiée de la commande MLI

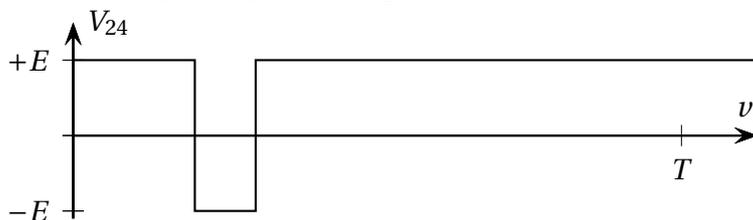
- 23 – Pente de la droite  $V_T$  :  $\frac{V_{T,M}}{T/4} = \frac{V_C}{t_1}$ .  $t_1 = \frac{T}{4} \frac{V_C}{V_{T,M}}$



- 24 – Quand  $V_{13} = +V_{cc}$ , le chemin passant est { E, inter 1, charge, inter3, masse }; on a alors  $v_{ch} = E$ . Quand  $V_{13} = -V_{cc}$ , le chemin passant est { E, inter 4, charge « à l'envers », inter2, masse }; on a alors  $v_{ch} = -E$ . La durée de l'état bas,  $v_{ch} = -E$ , est le double de l'intervalle de temps entre  $t_1$  et  $T/4$  soit  $\frac{T}{4} - \frac{T}{4} \frac{V_C}{V_{T,M}} = \frac{T}{2} \left( 1 - \frac{V_C}{V_{T,M}} \right)$ , soit un rapport cyclique de

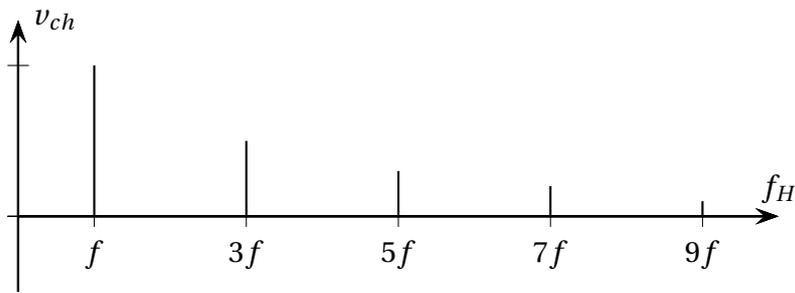
$$\alpha = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{V_C}{V_{T,M}} \right)$$

qui varie entre 0 ( $V_C = -V_{T,M}$ ) et 1 ( $V_C = +V_{T,M}$ ). La valeur moyenne de la tension  $v_{ch}$  est non nulle, c'est un hacheur quatre quadrants pas un onduleur.



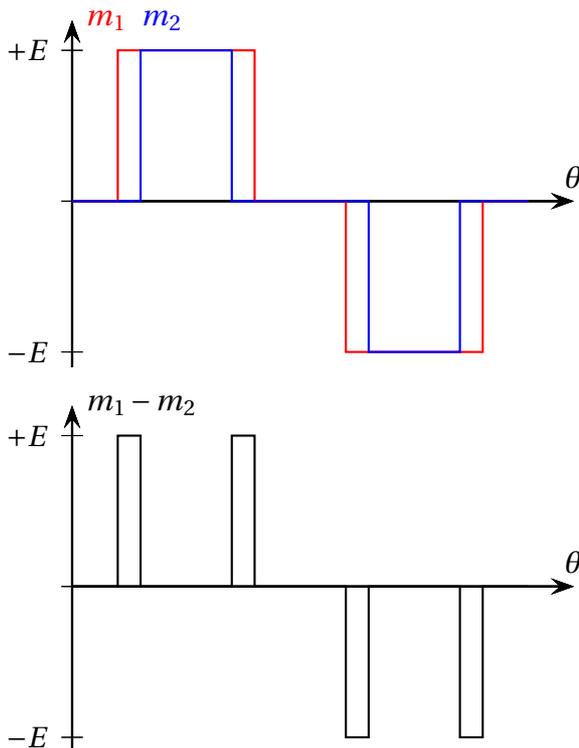
- 25 –  $V_{ch}^{eff} = E \sqrt{\frac{\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_3 + \alpha_6 - \alpha_5}{2\pi}}$

- 26 – On a 6 paramètres ce qui permet, a priori, de fixer la valeur de 5 harmoniques et de la valeur efficace. Les cinq harmoniques considérés sont ceux à 3,5,7,9,11  $f$  que l'on fixe à 0.



### III.C. — Étude d'une commande MLI numérique précalculée

□ 27 –  $v_{ch} = m_1 - m_2 + m_3 - m_4 + m_5 - m_6$



□ 28 –  $\cos(5\alpha_1) - \cos(5\alpha_2) + \cos(5\alpha_3) - \cos(5\alpha_4) + \cos(5\alpha_5) - \cos(5\alpha_6) = 0$

### III.D. — Utilisation de la technique de surmodulation

□ 29 –  $A_0 = \eta$

□ 30 –  $v_{ch}^* = v_{ch}$  si  $t$  est dans l'intervalle  $[nT_D, (n+\eta)T_D]$  avec  $n$  entier.  $v_{ch}^* = 0$  sinon. La fréquence de découpage étant très élevée,  $v_{ch}$  est quasi constant sur  $T_D$ , on a donc

$$V_{ch,F}^{*,\text{eff}} = \eta V_{ch}^{\text{eff}}$$

□ 31 – La surmodulation permet de régler la valeur efficace du signal.

□ 32 – Rapidement, une multiplication dans l'espace temporel conduit à une convolution dans l'espace fréquentiel. Sinon on développe chacun des termes et on voit apparaître des produits de sinus, qui d'après la trigonométrie ou le cours sur la modulation d'amplitude conduit à des fréquences  $pf_D \pm nf_{ch}$ .

