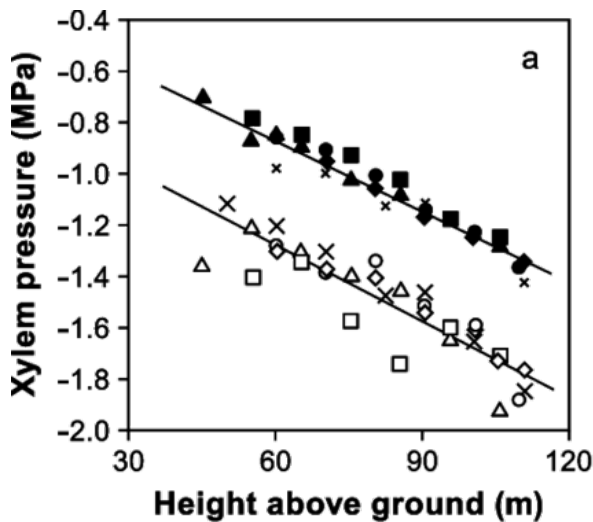
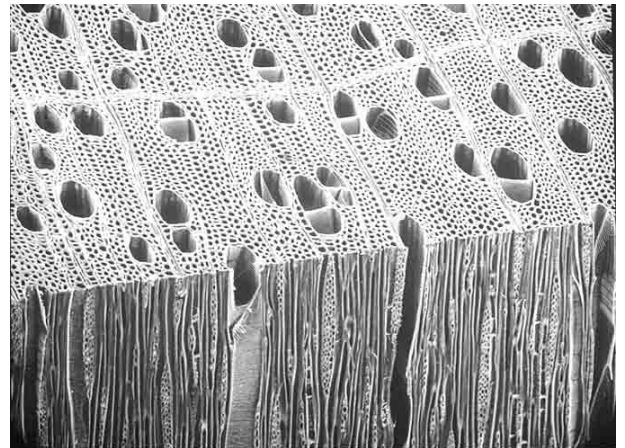


I Physique du cavitron

I.A Pressions négatives

L'objet de la première question est d'étudier la distribution de pression dans un tronc d'arbre, le modèle proposé et les résultats obtenus peuvent paraître en contradiction avec le cours de thermodynamique et délicats à interpréter.

Il existe effectivement des canaux verticaux dans le bois. L'image de microscopie ci-contre montre de tels canaux constitués de xylème. Leur paroi est constituée de cellules mortes. Le diamètre de ces canaux est de quelques dizaines de micromètres.

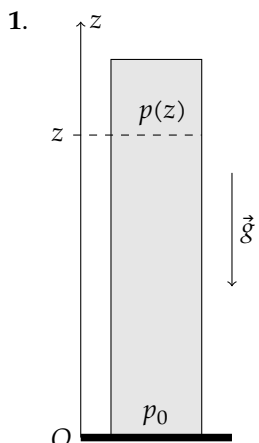
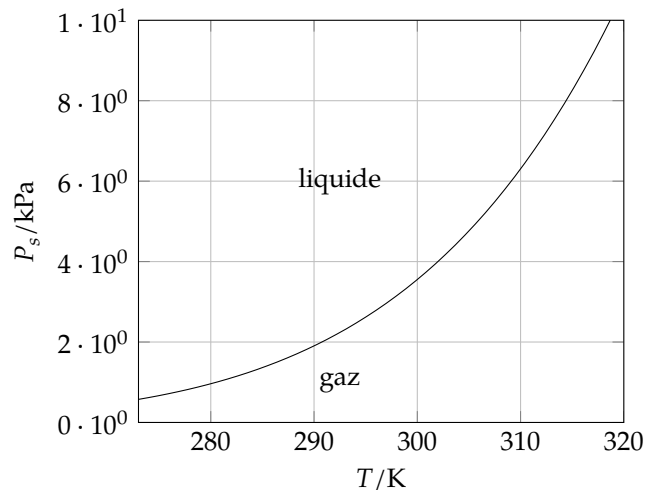


La pression varie à peu près comme le prévoit la statique des fluides dans le tronc. Le graphique ci-contre montre des mesures de pression faites dans différents séquoias le jour (symboles blancs) et la nuit (symboles noirs). La différence de pression entre les deux faisceaux de courbes est due à la différence d'évaporation entre le jour et la nuit : la pression de l'eau dans les feuilles n'est pas la même.

La pression est effectivement négative dans le tronc et les branches de l'arbre à partir d'une hauteur d'une dizaine de mètre au-dessus du sol.

Il peut paraître surprenant que l'état métastable de l'eau puisse exister pour des pressions aussi éloignées de la pression de vapeur saturante de l'eau qui est de 2 kPa aux températures usuelles.

Cet état métastable n'est sûrement pas facile à mettre en évidence dans un système macroscopique. Il existe par contre dans des systèmes microscopiques comme les canaux de xylème. Cette situation peut être mise en évidence à partir de l'étude énergétique faite à la question 4 du problème.



La loi de la statique des fluides s'écrit : $\vec{\text{grad}} p = \rho_e \vec{g}$

Donc, en projection sur l'axe (Oz) : $\frac{dp}{dz} = -\rho_e g$

Le fluide étant incompressible, la masse volumique ρ_e est uniforme. L'équation précédente s'intègre donc, en tenant compte de la condition $p(0) = p_0$:

$$p(z) = p_0 - \rho_e g z$$

La pression s'annule à l'altitude z_m telle que $p_0 - \rho_e g z_m = 0$, donc $z_m = \frac{p_0}{\rho_e g}$.

Soit $z_m = 10 \text{ m}$

Si la hauteur de l'arbre excède une dizaine de mètres, la pression de la sève sera négative, et donc inférieure à la pression de changement d'état de l'eau. Celle-ci est donc dans un état métastable.

2. En négligeant les effets de la pesanteur, la pression est $p = -\frac{F}{S}$. La pression est négative.

3. Je ne vois pas ce que signifie le travail reçu par un système vide. Il me paraît préférable de prendre comme système une bulle contenant de la vapeur d'eau, et de considérer que la quantité de matière et la pression à l'intérieur de cette bulle de vapeur sont négligeables devant celles de l'eau liquide.

Dans ce cas, le travail des forces de pression reçu par la bulle est $\delta W_p = -pdV$ où dV représente la variation de volume de la bulle lorsque son rayon passe de r à $r + dr$. Donc $dV = 4\pi r^2 dr$.

Donc $\delta W_p = -4\pi p r^2 dr$

La variation d'énergie potentielle de la bulle de vapeur est $dE_{pp} = -\delta W_p$. Donc : $dE_{pp} = 4\pi p r^2 dr$.

L'énergie potentielle étant définie à une constante additive arbitraire près, on peut l'écrire : $E_p(r) = \frac{4}{3}\pi p r^3$

4. En tenant compte de la tension superficielle, l'énergie potentielle totale de la bulle de vapeur est : $E_p(r) = 4\pi \left(\gamma_e + \frac{p}{3} r \right) r^2$

L'énergie potentielle totale s'exprime sous forme d'un polynôme d'ordre 3 en r : $E_p(r) = 4\pi \gamma_e r^2 + \frac{4\pi p}{3} r^3$

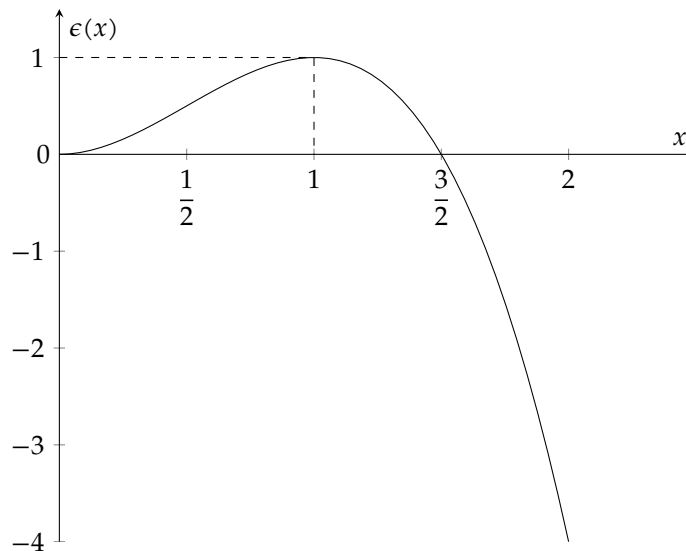
Alors $\frac{dE_p}{dr} = 4\pi (2\gamma_e + pr) r$. Cette dérivée s'annule en $r = -\frac{2\gamma_e}{p}$ et comme $p < 0$, la fonction admet un maximum pour cette valeur.

L'énergie potentielle est maximale pour $r = r_c$ avec $r_c = -\frac{2\gamma_e}{p}$.

Avec $\begin{cases} r_c = -\frac{2\gamma_e}{p} \\ E_a = \frac{16}{3}\pi \frac{\gamma_e^3}{p^2} \end{cases}$, $\begin{cases} r_c = 7,0 \cdot 10^{-8} \text{ m} \\ E_a = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ J} \end{cases}$

L'énergie réduite est $\epsilon(x) = \frac{4\pi \left(\gamma_e - \frac{p}{3} x \frac{2\gamma_e}{p} \right) \left(x \frac{2\gamma_e}{p} \right)^2}{\frac{16}{3}\pi \frac{\gamma_e^3}{p^2}}$

Donc $\epsilon(x) = (3 - 2x) x^2$



5. La première phrase de l'énoncé est difficilement compréhensible : r et r_b désignent tous les deux le rayon de la bulle. La condition $r_b = 2r_c$ ne semble jouer aucun rôle...

- L'état sans bulle correspond à $r = 0$. Cet état correspond à un minimum local d'énergie potentielle. Il s'agit donc d'un état métastable.
- La barrière de potentielle a une hauteur E_a : c'est l'énergie qu'il faut fournir au système pour qu'il passe dans l'état d'énergie le plus bas.
- L'état d'équilibre le plus stable correspond à une bulle de rayon infiniment grand : cela correspond à une situation où toute l'eau est à l'état gazeux, conformément aux prévisions thermodynamiques quand la pression est plus faible que la pression de vapeur saturante.
- Ce modèle permet d'expliquer la stabilité de l'eau liquide dans un système de petite dimension. Si le rayon du canal est inférieur à r_c , il ne peut pas se créer de bulles critiques. L'état métastable est alors le seul possible.

I.B Conductance hydraulique

6. L'écoulement étant incompressible $\text{div } \vec{v} = 0$, donc $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

$v(x, r)$ est indépendant de x .

7. Si on tient compte des conditions aux limites, le fluide est au repos au contact des parois en $r = a$, on peut donc s'attendre à ce que $\frac{dv(r)}{dr} < 0$.

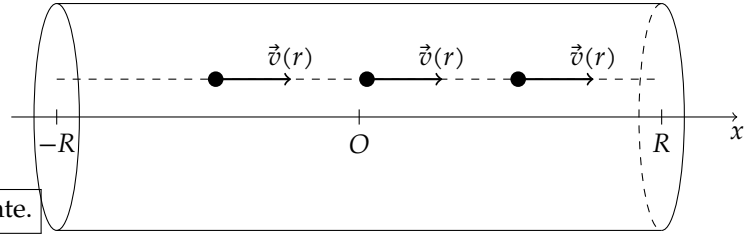
Le fluide à l'intérieur du cylindre de rayon r se déplace donc plus vite que le fluide à l'extérieur, et il subit de la part de celui-ci une force de frottement dirigé dans le sens des x décroissants : $d\vec{F} \cdot \vec{u}_x < 0$. Donc $\epsilon = 1$.

La force de viscosité est $d\vec{F} = \eta_e \frac{dv}{dr} dS \vec{u}_x$.

Les lignes de courant sont des droites parallèles à l'axe (Ox). Sur le schéma ci-contre, on a représenté une même particule fluide à différents instants.

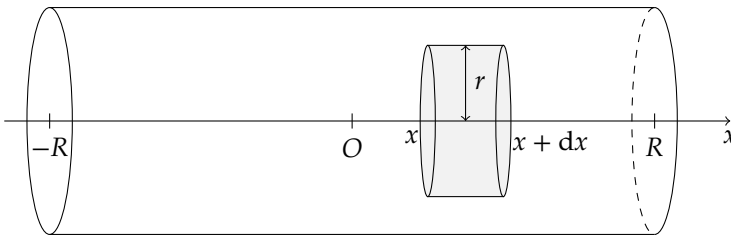
La vitesse de la particule reste constante au cours de son mouvement : elle a un mouvement rectiligne uniforme. Sa quantité de mouvement est donc constante.

La quantité de mouvement du système est donc constante.



On considère la particule fluide S_r représentée ci-contre. Cette particule fluide est soumise à :

- $\vec{F}_x = p(x) \pi r^2 \vec{u}_x$: force de pression sur la face d'abscisse x ;
- $\vec{F}_{x+dx} = -p(x+dx) \pi r^2 \vec{u}_x$: force de pression sur la face d'abscisse $x+dx$;
- $d\vec{F} = \eta_e \frac{dv}{dr} 2\pi r dx \vec{u}_x$: force de viscosité.



La quantité de mouvement du système considéré étant constante : $\vec{F}_x + \vec{F}_{x+dx} + d\vec{F} = \vec{0}$

$$\text{Donc } p(x) \pi r^2 - p(x+dx) \pi r^2 + \eta_e \frac{dv}{dr} 2\pi r dx = 0$$

$$\text{Au premier ordre en } dx : -r \frac{dp(x)}{dx} + 2\eta_e \frac{dv(r)}{dr} = 0.$$

$$\text{Donc } \frac{dp(x)}{dx} = \frac{2\eta_e}{r} \frac{dv(r)}{dr}.$$

Dans l'équation précédente, le terme de gauche est indépendant de r , et celui de droite est indépendant de x . Les deux variables x et r sont séparées : $\frac{dp(x)}{dx} = \frac{2\eta_e}{r} \frac{dv(r)}{dr} = \alpha$

$\frac{dp(x)}{dx}$ est une constante.

L'équation précédente s'intègre en $p(x) = \alpha x + \beta$ et les deux conditions aux limites sont : $\begin{cases} p(-R) = p_1 \\ p(R) = p_2 \end{cases}$.

$$\text{Donc } p(x) = \frac{p_2 - p_1}{2R} x + \frac{p_1 + p_2}{2}$$

8. L'équation établie à la question précédente devient : $\frac{dv(r)}{dr} = \frac{p_2 - p_1}{4R\eta_e} r$

Ce qui s'intègre en : $v(r) = \frac{p_2 - p_1}{8R\eta_e} r^2 + \gamma$ où γ est une constante d'intégration.

$$\text{Or } v(a) = 0, \text{ donc } v(r) = \frac{p_2 - p_1}{8R\eta_e} (r^2 - a^2)$$

On note S une section de la canalisation : S est un disque d'axe (Ox) et de rayon a . Le débit volumique est $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$.

$$\text{Donc } D_v = \int_0^a \frac{p_2 - p_1}{8R\eta_e} (r^2 - a^2) 2\pi r dr.$$

$$\text{D'où : } D_v = \frac{(p_2 - p_1)\pi}{4R\eta_e} \int_0^a (r^3 - a^2 r) dr$$

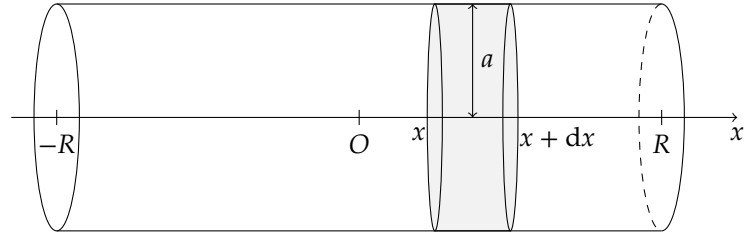
$$\text{Donc } D_v = \frac{(p_2 - p_1)\pi}{4R\eta_e} \left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{2} \right)$$

$$\text{Finalement : } D_v = \frac{(p_1 - p_2)a^4\pi}{16R\eta_e} = G_H(p_1 - p_2).$$

$$\text{La conductance hydraulique est donc : } G_H = \frac{\pi a^4}{16R\eta_e}$$

9. La vitesse débitante est $\bar{v} = \frac{(p_1 - p_2)a^4\pi}{16R\eta_e} \frac{1}{\pi a^2}$. Donc $\bar{v} = \frac{(p_1 - p_2)a^2}{16R\eta_e}$

La force de viscosité qui s'exerce sur une portion de fluide comprise entre les abscisses x et $x + dx$ est, en utilisant le bilan de force de la question 7 : $d\vec{F} = \frac{dp}{dx} \pi a^2 dx \vec{u}_x$ et $\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{2R}$.



Donc $d\vec{F} = -\frac{\pi a^2 (p_1 - p_2)}{2R} dx \vec{u}_x$. Que l'on peut écrire $d\vec{F} = -8\pi\eta_e \frac{\pi a^2 (p_1 - p_2)}{16R\eta_e} dx \vec{u}_x$.

Donc $d\vec{F} = -8\pi\eta_e \bar{v} dx \vec{u}_x$

10. Le nombre de REYNOLDS est $R_e = \frac{a\bar{v}\rho_e}{\eta_e}$. Donc $\begin{cases} \bar{v} = 6,3 \text{ mm/s} \\ R_e = 0,13 \end{cases}$

Le nombre de REYNOLDS est petit devant la valeur critique qui est de l'ordre de $2 \cdot 10^3$: L'écoulement est laminaire.

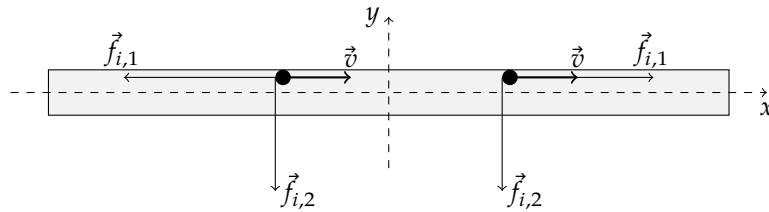
I.C Le cavitron

11. Avec $\begin{cases} [\rho_e] = ML^{-3} \\ [\omega] = T^{-1} \\ [x] = L \\ [\bar{v}] = LT^{-1} \end{cases}$, les dimensions de $\vec{f}_{i,1}$ et $\vec{f}_{i,2}$ sont : $\begin{cases} [\rho_e \omega^2 x] = ML^{-2}T^{-2} \\ [\rho_e \omega \bar{v}] = ML^{-2}T^{-2} \end{cases}$

Ces deux dimensions sont bien celles d'une force volumique, on peut par exemple considérer la force volumique de pesanteur $\rho_e \vec{g}$ dont la dimension est $[\rho_e g] = ML^{-2}T^{-2}$.

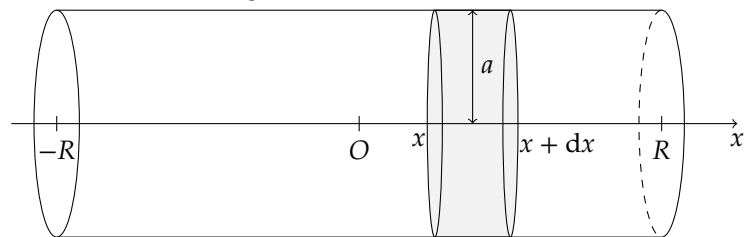
$\vec{f}_{i,1}$ et $\vec{f}_{i,2}$ sont homogènes à des forces volumiques.

Dans le référentiel lié à la branche, les forces ont l'allure suivante :



La force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{i,1}$ peut être ressentie dans un véhicule en virage.

12. Les forces qui s'exercent sur une portion de fluide comprise entre les abscisses x et $x + dx$ sont :



- $\pi a^2 p(x) \vec{u}_x$: pression en x ;
- $-\pi a^2 p(x + dx) \vec{u}_x$: pression en $x + dx$;
- $d\vec{F} = -8\pi\eta_e \bar{v} dx \vec{u}_x$: force de viscosité ;
- $d\vec{F}_{i1} = \rho_e \omega^2 x \pi a^2 dx \vec{u}_x$: force d'inertie d'entraînement ;
- $d\vec{F}_{i2} = -2\rho_e \omega \bar{v} \pi a^2 dx \vec{u}_y$: force d'inertie de CORIOLIS ;
- $dF_p = dF_p \vec{u}_y$ force de pression exercée par la paroi du canal.

Lorsque le fluide est à l'équilibre dans le référentiel R_b :

$$\pi a^2 (p(x) - p(x + dx)) \vec{u}_x - 8\pi\eta_e \bar{v} dx \vec{u}_x + \rho_e \omega^2 x \pi a^2 dx \vec{u}_x - 2\rho_e \omega \bar{v} \pi a^2 dx \vec{u}_y + F_p \vec{u}_y = \vec{0}$$

En projection sur (Ox) : $\frac{dp(x)}{dx} = -\frac{8\eta_e \bar{v}}{a^2} + \rho_e \omega^2 x$

Donc $\int_x^R \frac{dp(x')}{dx'} dx' = \int_x^R \left[-\frac{8\eta_e \bar{v}}{a^2} + \rho_e \omega^2 x' \right] dx'$

Et $p(R) - p(x) = -\frac{8\eta_e \bar{v}}{a^2} (R - x) + \frac{\rho_e \omega^2}{2} (R^2 - x^2)$

Donc, pour $x > 0$: $p(x) = p_2 + \frac{8\eta_e \bar{v}}{a^2} (R - x) - \frac{\rho_e \omega^2}{2} (R^2 - x^2)$

13. Avec les deux formules données à la question 12 : $\begin{cases} p(0) = p_2 - \frac{\rho_e \omega^2 R^2}{2} - \frac{8\eta_e \bar{v} R}{a^2} \\ p(0) = p_1 - \frac{\rho_e \omega^2 R^2}{2} + \frac{8\eta_e \bar{v} R}{a^2} \end{cases}$

Donc, en faisant la demi-somme de ces deux équations : $p(0) = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{\rho_e \omega^2 R^2}{2}$

En faisant la différence des deux premières équations : $p_2 - p_1 + \frac{16\eta_e R \bar{v}}{a^2} = 0$.

La vitesse débitante est donc : $\bar{v} = \frac{(p_1 - p_2)a^2}{16\eta_e R}$.

Or la conductance est $G_H = \frac{\pi a^2 \bar{v}}{16\eta_e R}$, donc $G_H = \frac{\pi a^4}{16\eta_e R}$

On retrouve la même expression de la conductance hydraulique qu'à la question 8.

(La démonstration faite ne prouve pas grand chose, car on a admis sans justification plusieurs propriétés de l'écoulement.)

14. La loi de la statique des fluides dans le réservoir 2 s'écrit : $\overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{f}_{i,1}$. Donc $\frac{dp(x)}{dx} = \rho_e \omega^2 x$.

Ce qui s'intègre : $\int_L^R \frac{dp(x)}{dx} dx = \rho_e \omega^2 \int_L^R x dx$.

Donc $p(R) - p(L) = \frac{\rho_e \omega^2}{2} (R^2 - L^2)$ et $\begin{cases} p(R) = p_2 \\ p(L) = p_0 \end{cases}$.

D'où $p_2 = p_0 + \frac{\rho_e \omega^2}{2} (R^2 - L^2)$

De la même façon : $p_1 = p_0 + \frac{\rho_e \omega^2}{2} (R^2 - (L-d)^2)$

Et $p_1 - p_2 = \frac{\rho_e \omega^2}{2} [L^2 - (L-d)^2]$. D'où $p_1 - p_2 = \frac{\rho_e \omega^2}{2} [L + (L-d)][L - (L-d)]$.

Dans la limite $d \ll L$: $p_1 - p_2 = \rho_e \omega^2 L d$

15. D'après le graphique fourni : lorsque $\Delta p \approx -3 \text{ Mpa}$, alors $\delta_G = 0,50$.

Or $\Delta p = -\rho_e \omega^2 L^2$, donc $\omega = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{-\Delta p}{\rho_e}}$. $\omega = 183 \text{ rad/s}$

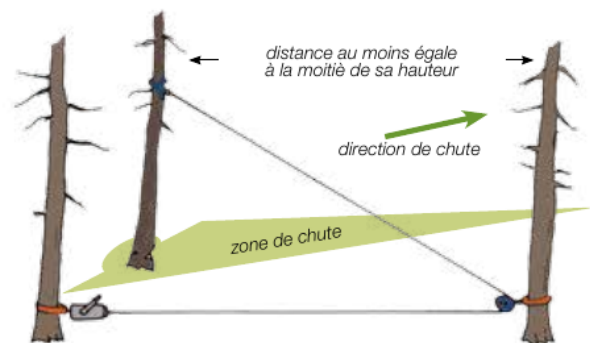
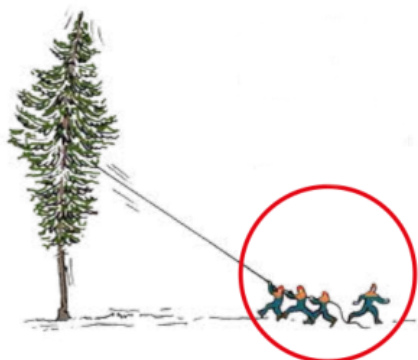
La différence de pression est alors $p_1 - p_2 = 0,10 \text{ MPa}$

Si les bulles restent accrochées aux parois du tube, leur présence réduit la section utile du canal : la résistance hydraulique augmente, et la conductance hydraulique diminue.

II Chutes d'arbres

II.A Chute d'un arbre mort

Les bûcherons utilisent des câbles pour tirer sur des arbres, et s'assurer qu'ils tombent du bon côté. Mais les bûcherons font preuve de bon sens. Les deux images ci-dessous, extraites d'un manuel de bûcheronnage, indique la situation dans laquelle les bûcherons ne doivent jamais se trouver, ainsi qu'une façon correcte d'agir pour faire tomber un arbre.



Les bûcherons ne se mettent jamais dans la zone de chute prévue. Ils utilisent une poulie accrochée à un autre arbre, et ils placent un treuil loin de la zone de chute prévue. Les bûcherons peuvent alors travailler en sécurité.

16. Aucun bûcheron raisonnable ne tire vers lui avec un câble un arbre coupé ...

À l'équilibre, la somme des forces qui s'exercent sur B est nulle :
 $-mg\vec{u}_z - \vec{F} + \vec{R}_2 = \vec{0}$.

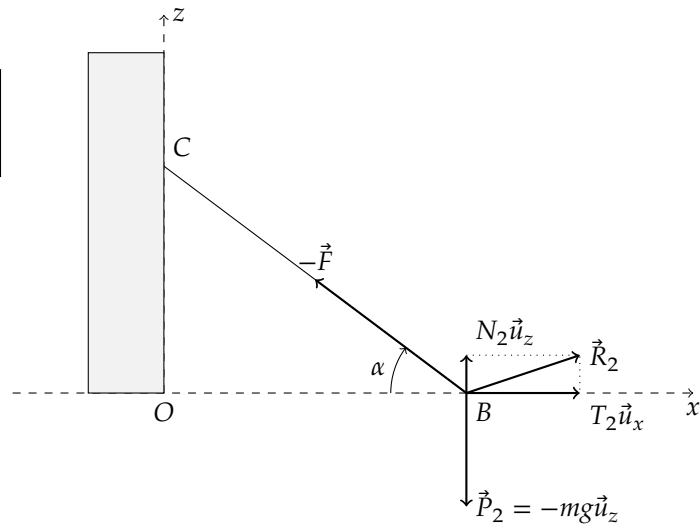
Donc, en projection sur les deux axes :

$$\begin{cases} N_2 = mg - F \sin \alpha \\ T_2 = F \cos \alpha \end{cases}$$

La valeur F_{\max} est telle que le point B glisse sur le sol : $T_2 = fN_2$ dans ce cas.

Donc $F_{\max} \cos \alpha = f(mg - F_{\max} \sin \alpha)$.

Donc
$$F_{\max} = \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$



17. À l'équilibre, la somme des forces qui s'exercent sur l'arbre est nulle : $-Mg\vec{u}_z + \vec{F} + \vec{R}_1 = \vec{0}$.

Donc, en projection sur les deux axes :

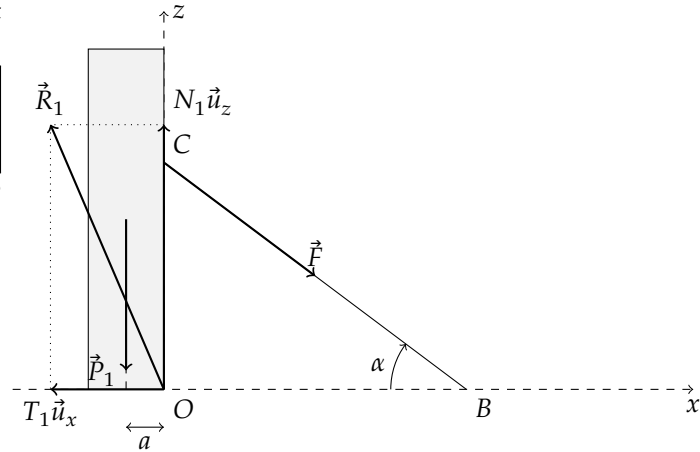
$$\begin{cases} N_1 = Mg + F \sin \alpha \\ T_1 = -F \cos \alpha \end{cases}$$

La valeur F'_{\max} qui entraîne le glissement au point O est telle que : $\|T_1\| = fN_1$.

Donc
$$F'_{\max} = \frac{fMg}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

Or
$$\begin{cases} fMg > fmg \\ \cos \alpha - f \sin \alpha < \cos \alpha + f \sin \alpha \end{cases}, \text{ donc } F'_{\max} > F_{\max}.$$

Pour $F \leq F_{\max}$, l'arbre ne glisse pas.



18. En tenant compte de l'orientation, le moment du poids est : $\Gamma_g = -Mga$

19. Le moment de la réaction du sol en O est nul par rapport à l'axe Oy . La rotation de l'arbre commence si $\Gamma_b + \Gamma_g > 0$. Donc si $\Gamma_b > Mga$.

La valeur minimale de Γ_b est Mga .

20. Le bras de levier de la force \vec{F} par rapport à l'axe (Oy) est $\ell \cos \alpha \sin \alpha$.

Le moment de cette force est alors : $\Gamma_b = F \ell \cos \alpha \sin \alpha$.

Donc
$$\Gamma_b = \frac{1}{2} F \ell \sin(2\alpha).$$

L'énoncé ne précise pas ce qui définit la valeur optimale de l'angle α : je suppose que c'est celle qui rend Γ_b maximale en considérant que la tension F est constante. Ce n'est pas ce qui est utilisé à la question suivante.

Le moment Γ_b est maximale si $\alpha = \alpha_m = \frac{\pi}{4}$

21. La bûcheron prend de plus en plus de risque : il tire vers lui un arbre, tout en étant sur le point de glisser, et donc de tomber au sol....

Dans la situation étudiée :

$$\begin{cases} \Gamma_b = F \ell \cos \alpha \sin \alpha \\ F = \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \end{cases} \cdot \text{Donc } \Gamma_b = \frac{\ell f mg \cos \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

Donc
$$\Gamma_b = \frac{mg \ell}{\frac{1}{f \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}}$$

Donc
$$\Gamma_b = \frac{mg \ell}{\Phi(\alpha)} \text{ avec } \Phi(\alpha) = \frac{1}{f \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

Si α_m désigne la valeur de α pour laquelle Γ_b est maximale, α_m est la valeur de α qui rend Φ minimale.

Or
$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = -\frac{\cos \alpha}{f \sin^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$$
.

Cette dérivée s'annule si $\frac{\cos \alpha}{f \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$, donc si $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{f}}$

L'angle optimal est $\alpha_m = \arctan \frac{1}{\sqrt[3]{f}}$

Si $f = 1$, l'angle optimal est $\alpha_m = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

22. La tension du câble est $F = 707 \text{ N}$

La longueur de la corde est $\ell = 14 \text{ m}$

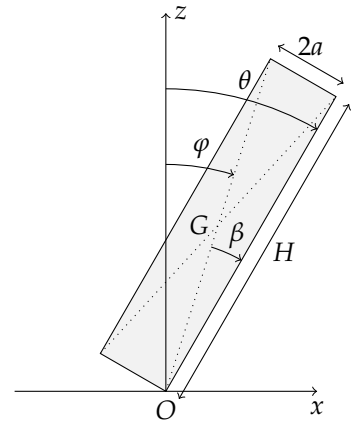
Le bûcheron est dans une situation dangereuse : il est à 10 m d'un arbre de 20 m de haut qui va tomber. Il est temps pour lui de faire une figure représentant la situation en faisant apparaître les différents paramètres, d'exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_p de l'arbre en fonction de M, g, H, a et θ . Il peut ainsi déterminer l'angle critique θ_s . Dès que l'arbre passe par l'angle critique θ_s , il peut lâcher le câble et courir très vite!

23. L'énergie potentielle de pesanteur est $E_p = \frac{1}{2} Mg \sqrt{H^2 + 4a^2} \cos \varphi$.

Et $\varphi = \theta - \beta$ avec $\tan \beta = \frac{2a}{H}$.

$$\text{Donc } E_p = \frac{1}{2} Mg \sqrt{H^2 + 4a^2} \cos \left[\theta - \arctan \frac{2a}{H} \right]$$

L'énergie potentielle passe par un maximum pour $\theta = \theta_s = \arctan \frac{2a}{H}$. Lorsque θ est supérieur à cette valeur, l'arbre tombe sur le bûcheron.



Cours bûcheron, cours!

II.B Chute d'un arbre vivant

24. Un vent violent a une vitesse de l'ordre de 100 km/h ce qui fait $U \approx 30 \text{ m/s}$

Le nombre de REYNOLDS associé à l'écoulement est $R_e = \frac{2aU\rho_a}{\eta_a}$. $R_e \approx 1,5 \cdot 10^6$

L'écoulement est turbulent dans le sillage de l'arbre, et la force de traînée est proportionnelle au carré de la vitesse.

La force qui s'exerce sur un élément du tronc de maître-couple $2adz$ est : $d\vec{F}_v = 2aC_x\rho_a U^2 dz \vec{u}_x$

25. Le moment des actions du vent est $\Gamma_v = \int_0^H 2aC_x\rho_a U^2 z dz$.

$$\text{Donc } \Gamma_v = aC_x\rho_a U^2 H^2$$

26. Lorsque l'arbre est incliné d'un angle θ :

- Le maître-couple de chaque élément de surface passe de $2adz$ à $2a \cos \theta dz$;
- Le bras de levier de la force de traînée par rapport à (Oy) passe de z à $z \cos \theta$;
- Le coefficient de traînée C_x est modifié, mais il n'est pas possible d'estimer sa variation;
- Les différents éléments subissent une force de portance dont le moment n'est pas nul, mais il n'est pas possible d'estimer sa valeur.

Si on ne tient compte que des termes que l'on peut facilement estimer : $\Gamma_v(\theta) \approx \Gamma_v(0) \cos^2 \theta$. Le coefficient cherché est donc

$$n = 2$$

27. On considère la formule : $\Gamma_r(\theta) = \Gamma_0 \left(\beta + 4\frac{\theta}{\theta_c} - 5\frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right)$. Alors $\begin{cases} \Gamma_r(0) = \beta\Gamma_0 \\ \Gamma_r(\theta_c) = \Gamma_0(\beta - 1) \end{cases}$

Or $\Gamma_r(0) = \Gamma_0$, donc $\beta = 1$.

Dans ce cas $\Gamma_r(\theta_c) = 0$. On constate sur la courbe que le couple s'annule pour $\theta = 10^\circ$, donc $\theta_c = 10^\circ$

Avec $\Gamma_r(\theta) = \Gamma_0 \left(1 + 4\frac{\theta}{\theta_c} - 5\frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right)$: $\frac{d\Gamma_r}{d\theta} = \Gamma_0 \left(\frac{4}{\theta_c} - \frac{10\theta}{\theta_c^2} \right)$.

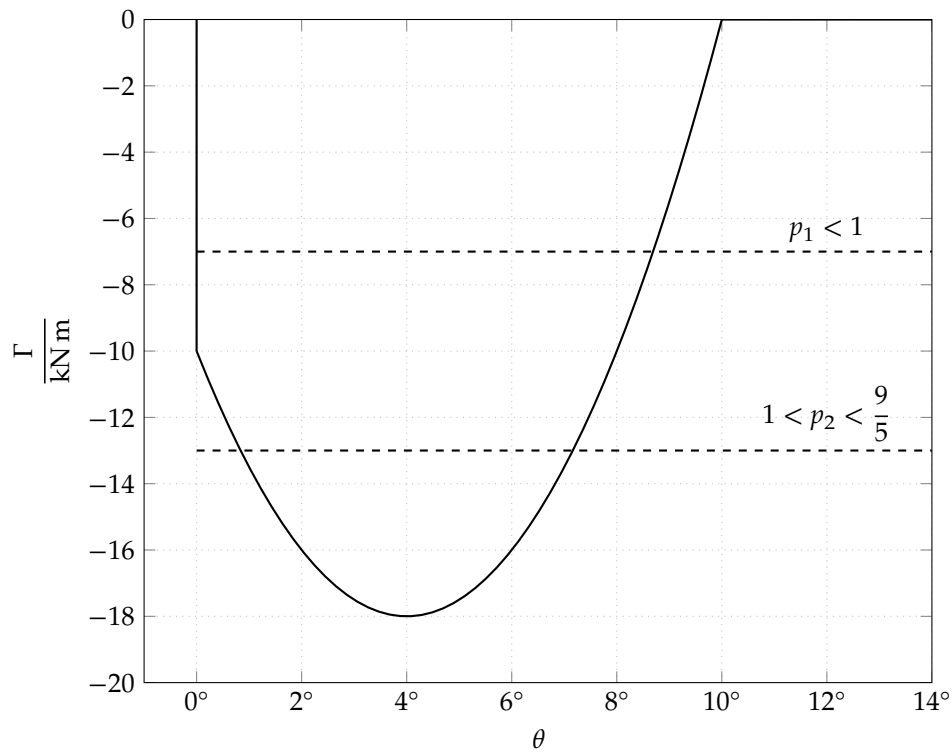
Cette dérivée s'annule si $\theta = \frac{2}{5}\theta_c$. D'où $\theta_m = \frac{2}{5}\theta_c = 4^\circ$.

Et $\Gamma_m = \Gamma_r(\theta_m) = \Gamma_0 \left(1 + 4\frac{2}{5} - 5\frac{4}{25} \right)$. Donc $\Gamma_m = \frac{9}{5}\Gamma_0$.

$$\text{Donc } \begin{cases} \frac{\theta_m}{\theta_c} = \frac{2}{5} \\ \frac{\Gamma_m}{\Gamma_0} = \frac{9}{5} \end{cases}$$

Les données «expérimentales» permettent d'estimer $\theta_m = 4^\circ$ ce qui correspond à la valeur précédente et $\Gamma_m \approx 1,7\Gamma_0$, ce qui diffère de 5% de la valeur précise.

28. Les positions d'équilibre correspondent aux abscisses des points d'intersection des courbes représentant $\Gamma_r(\theta)$ et $-\Gamma_v$.



- Si $p < 1$, l'arbre admet deux positions d'équilibre : $\theta_{e1} = 0$ et $\theta_{e2} > \theta_m$.

Pour étudier la stabilité de la position $\theta_{e1} = 0$ on imagine une petite perturbation de la position $\theta = \theta_{e1} + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$. Dans ce cas, le moment du vent reste constant, et le moment de rappel augmente. L'arbre retourne vers sa position d'équilibre.

Si $p < 1$, la position d'équilibre $\theta = 0$ est stable.

- Si $1 < p < \frac{9}{5}$, il existe deux positions d'équilibre, $\theta_{e1} < \theta_m$ et $\theta_{e2} > \theta_m$.

Un raisonnement analogue au précédent permet de conclure que θ_{e1} est une position d'équilibre stable et que θ_{e2} est instable.

- Dans le cas d'un coup de vent violent, l'arbre va osciller. Il peut alors dépasser la position critique θ_c et se rompre.
(La réponse à cette dernière partie a été faite en reformulant l'énoncé de la question suivante.)

29. Le théorème du moment cinétique appliqué à l'arbre, autour de l'axe (Oy) s'écrit : $J\ddot{\theta} = \Gamma_r(\theta) + \Gamma_v$

$$\text{avec } \begin{cases} \Gamma_r(\theta) = -|\Gamma_0| \left(1 + 4\frac{\theta}{\theta_c} - 5\frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) \\ \Gamma_v = p|\Gamma_0| \end{cases}$$

$$\text{Donc } J\ddot{\theta} = |\Gamma_0| \left((p-1) - 4\frac{\theta}{\theta_c} + 5\frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right)$$

$$\text{En multipliant les deux membres de l'égalité par la vitesse angulaire : } J\dot{\theta}^2 = |\Gamma_0| \left((p-1) - 4\frac{\theta}{\theta_c} + 5\frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) \theta$$

$$\text{ce qui s'intègre en tenant compte de la condition initiale } \begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases} : \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = |\Gamma_0| \left((p-1) - 2\frac{\theta}{\theta_c} + \frac{5}{3}\frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) \theta$$

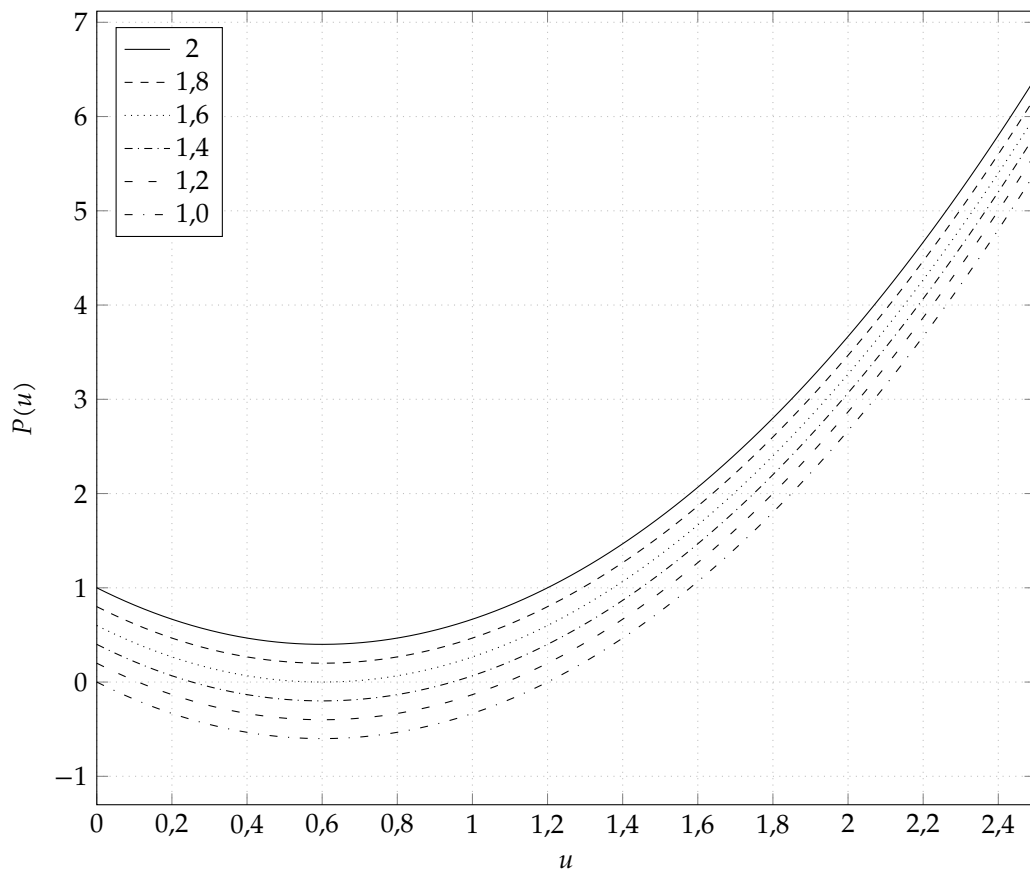
$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = |\Gamma_0|\theta P(u) \text{ avec } P(u) = (p-1) - 2u + \frac{5}{3}u^2 \text{ et } u = \frac{\theta}{\theta_c}$$

Cette intégrale première du mouvement n'est valable que si $\begin{cases} p > 1 \\ 0 < u < \frac{5}{2} \end{cases}$

L'arbre va osciller sous l'effet du vent, il faut chercher à quelles conditions le mouvement de celui-ci est borné et reste dans le domaine $u < \frac{5}{2}$.

Lorsque l'arbre atteint l'écart angulaire maximale $\dot{\theta} = 0$, et donc $P(u) = 0$.

La graphique ci-dessous représente $P(u)$ pour différentes valeurs de p .



L'équation $P(u) = 0$ admet des solutions réelles si son discriminant est positif.

Or $\Delta = 4 \left[1 + \frac{5}{3}(1-p) \right]$, donc $\Delta > 0$ si $p < \frac{8}{5}$.

Il faut encore s'assurer que la valeur maximale de u est plus petite que $\frac{5}{2}$.

Avec $u_m = \frac{3}{5} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{3}(1-p)} \right)$, la plus grande valeur de u_m va être obtenue lorsque $p = 1$ est cette valeur est $u_m = \frac{6}{5}$.

Donc, dans tous les cas, $u_m < \frac{5}{2}$.

La valeur limite de p est $p_c = \frac{8}{5}$

En utilisant l'expression du couple Γ_v obtenue à la question 25, la valeur critique de la vitesse est telle que : $p_c |\Gamma_0| = a C_x \rho_a H^2 U_c^2$.

Donc $U_c = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{p_c |\Gamma_0|}{a C_x \rho_a}}$, soit $U_c = 13 \text{ m/s}$

30. Dans le cas où $p = \frac{4}{3}$, les bornes du mouvement de l'arbre sont telles que $P(u) = 0$, donc, les deux limites sont :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{5} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{5}{3}(1-p)} \right) \\ u_2 = \frac{3}{5} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{3}(1-p)} \right) \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{5} \\ u_2 = 1 \end{cases}.$$

Ce qui correspond à des angles $\begin{cases} \theta_1 = \frac{\theta_c}{5} \\ \theta_2 = \theta_c \end{cases}$.

Le modèle physique que l'on a étudié dans les questions précédentes est trop simpliste pour décrire la réalité. En particulier, on a utilisé des expressions des couples obtenues pour un arbre immobile et on a transposé ces résultats pour un arbre en mouvement. Ce qui conduit à l'absence d'amortissement des oscillations dans le modèle étudié. Dans la réalité, les oscillations sont amorties et l'arbre s'immobilise dans la position d'équilibre décrite à la question 28.