

# Mines. Physique II. PSI 2020. La lévitation acoustique. <sup>1</sup>

**Q01.** Dans le cadre de l'approximation acoustique, les fluctuations de pression, de masse volumique et de vitesse sont respectivement supposées très faibles devant la pression ambiante, la masse volumique de l'air au repos et la vitesse du son dans l'air. **Les calculs sont faits à l'ordre 1 en  $p_1$ ,  $\mu_1$  et  $v_1$ .**

**Q02.** On considère que la vitesse n'a qu'une composante selon  $Oz$  et est une fonction de  $t$  et de  $z$ , très généralement la vitesse peut varier au cours du temps et/ou du fait d'un déplacement, c'est à dire :

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} dt + \frac{\partial v_1}{\partial z} dz \Rightarrow \frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial z} v_1}_{\text{ordre 2 en } v_1} \Rightarrow \boxed{\frac{dv_1}{dt} \approx \frac{\partial v_1}{\partial t}}$$

**Q03.** On applique un principe fondamental de la dynamique (PFD) à la particule de fluide de masse  $\delta m = \mu_0 d\tau$ . Cette particule est soumise à son poids et à la résultante des forces de pression :

$$\mu_0 d\tau \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \left( -\overrightarrow{\text{grad}P} \right) d\tau + \mu_0 d\tau \vec{g} = \underbrace{\left( -\overrightarrow{\text{grad}P_0} + \mu_0 \vec{g} \right)}_{=\vec{0}} d\tau + \left( -\overrightarrow{\text{grad}p_1} \right) d\tau$$

Le premier terme du second membre caractérise l'**équilibre hydrostatique** et il se simplifie, en conclusion en projection sur l'axe vertical :

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z}} \quad (1)$$

**Q04.** Conformément à la demande de l'énoncé, on **donne** les relations linéarisées sans les établir :

- conservation de la masse :  $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = 0$  (2) ;
- évolution isentropique :  $\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$  (3).

**Q05.** On élimine la fluctuation de masse volumique en reportant (3) dans (2) pour obtenir le nouveau système :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} \quad (1) \quad \text{et} \quad \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} + \mu_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} = 0 \quad (2')$$

On dérive alors (1) et on élimine la surpression grâce à (2') :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p_1}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0}$$

Il s'agit de l'**équation de d'Alembert** à une dimension avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$ .

1. Remarques : [cedric.grange@laposte.net](mailto:cedric.grange@laposte.net)

**Q06.** À une dimension l'équation de la diffusion thermique s'écrit :  $\mu_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ . Par analyse dimensionnelle, on en déduit que le phénomène de diffusion agit sur une longueur  $L$  en une durée  $\tau_{\text{diff}} \approx \frac{\mu_0 c_p L^2}{\kappa}$ .

Dans le cas présent, les fluctuations de température pourraient apparaître à l'échelle de l'onde acoustique, c'est à dire de la longueur d'onde, en conséquence :

$$\tau_{\text{diff}} \approx \frac{\mu_0 c_p \lambda^2}{\kappa} \approx \frac{\mu_0 c_p}{\kappa} \times \left( \frac{c}{f} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{\tau_{\text{diff}}}{T} \approx \frac{\mu_0 c_p c^2}{\kappa} \times \frac{1}{f}$$

$\frac{\mu_0 c_p c^2}{\kappa}$  est nécessaire homogène à une fréquence et on la note  $f_0$ , c'est à dire :

$$\frac{\tau_{\text{diff}}}{T} \approx \frac{f_0}{f} \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{\mu_0 c_p c^2}{\kappa}$$

Pour que l'hypothèse d'adiabaticité soit vérifiée, il faut que les échanges thermiques n'aient pas le temps de s'effectuer en une période  $T$  du phénomène acoustique, cela nécessite  $\tau_{\text{diff}} \gg T$  :

$$\frac{\tau_{\text{diff}}}{T} \gg 1 \Leftrightarrow \boxed{f \ll f_0 = \frac{\mu_0 c_p c^2}{\kappa}}$$

$$\text{A.N : } f_0 = \frac{1,2 \times 1 \times 10^3 \times (3,4 \times 10^2)^2}{3 \times 10^{-2}} \Rightarrow \boxed{f_0 = \frac{1,2 \times 3,4^2}{3} \times 10^9 \text{ Hz} \approx 4 \times 10^9 \text{ Hz}}$$

Pour le critère soit vérifiée, il faut  $f \ll f_0$ , on peut donc retenir  $f < f_{\text{max}} = 10^7 \text{ Hz}$ . Ceci est **tout à fait compatible avec les ondes ultrasonores considérées ici**.

**Q07.** La membrane oscillant sinusoïdalement, sa position est donnée par  $z_m(t) = h + Z_m \cos(\omega t + \varphi)$ , il vient :

$$\frac{dz_m(t)}{dt} = -\omega Z_m \sin(\omega t + \varphi) = u_m(t) = U_m \sin(\omega t)$$

On en déduit par identification :  $Z_m \omega = U_m$ , c'est à dire :  $Z_m = \frac{U_m}{2\pi f}$ .

$$\text{A.N : } Z_m = \frac{10 \times 10^{-2}}{2\pi \times 2,0 \times 10^4} = \frac{10^{-5}}{4\pi} \Rightarrow \boxed{Z_m \approx 8,0 \times 10^{-7} \text{ m}}$$

**Q08.** Le fluide ne pouvant pénétrer la membrane, il y a nécessairement **continuité de la vitesse à l'interface** :

$$u_m(t) = v_1(h + z_m(t), t)$$

Pour une fréquence de 20 kHz, la longueur d'onde est de l'ordre du centimètre, en conséquence  $Z_m \ll \lambda$  (l'approximation acoustique est une approximation de grande longueur d'onde). La vitesse  $v_1$  variant spatialement à l'échelle de la longueur d'onde, on peut pour

l'argument spatial confondre  $h$  et  $h + z_m(t)$  et donc :

$$u_m(t) \approx v_1(h, t)$$

**Q09.** Le support étant fixe en  $z = 0$ , on en déduit immédiatement  $v_1(0, t) = 0$ .

Le problème est identique au cas d'une corde dont l'une des extrémités est fixe et l'autre est reliée à un vibreur.

Compte tenu des conditions aux limites et de l'excitation sinusoïdale, on cherche une solution sous forme d'une onde stationnaire de la forme :

$$\forall t, \forall z \in ]0, h[, \quad v_1(z, t) = A \cos(\omega t + \varphi_t) \cos(kz + \varphi_z)$$

En reportant cette solution dans l'équation d'onde, on montre aisément que  $k = \omega/c$ .

On applique alors les conditions aux limites :

$$\forall t, \quad v_1(0, t) = 0 = A \cos(\omega t + \varphi_t) \cos(\varphi_z)$$

On peut retenir  $\varphi_z = -\pi/2$  et le champ de vitesse prend la forme :

$$\forall t, \forall z \in ]0, h[, \quad v_1(z, t) = A \cos(\omega t + \varphi_t) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

On tient enfin compte de la condition en  $z = h$  :

$$\forall t, \quad v_1(h, t) = U_m \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi_t) \sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)$$

On peut retenir  $\varphi_t = -\pi/2$  et  $A = U_m / \sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)$ , finalement :

$$\forall t, \forall z \in [0, h], \quad v_1(z, t) = \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \sin(\omega t) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

**Q10.** Les maxima de vitesse sont associés aux maxima de la valeur absolue du sinus spatial, c'est à dire :

$$\frac{\omega z_n}{c} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda} z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

C'est à dire :  $z_n = \frac{\lambda}{4} (1 + 2n)$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , dans la limite  $z_n < h$ .

L'amplitude des ventres vaut  $V_{1m} = \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)}$ . Cette amplitude diverge pour :

$$\frac{\omega_p h}{c} = p\pi \quad \Leftrightarrow \quad \omega_p = \frac{p\pi c}{h} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}^*$$

Nous nous sommes placés dans l'approximation acoustique; en cas de divergence des fluctuations, on ne peut plus se limiter aux termes d'ordre 1 et on doit **tenir compte de termes non linéaires qui apparaissent dans les équations**.

En présence de mouvements plus importants, les effets de frottements par viscosité ne seront en pratique plus négligeables créant de la dissipation.

**Q11.** On repart de l'équation linéarisée (1) issue du PDF :

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\mu_0 U_m \omega}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

On intègre alors par rapport à  $z$  en négligeant toute constante pour un phénomène ondulatoire :

$$\forall t, \forall z \in [0, h], \quad p_1(z, t) = \frac{c\mu_0 U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

Déterminons la force due à la seule surpression :

$$\vec{F} = \left(-\text{grad} p_1\right) \frac{4\pi a^3}{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{4\pi a^3}{3} \times \frac{\mu_0 \omega U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) \vec{u}_z$$

$\langle \cos(\omega t) \rangle = 0$ , donc  $\langle \vec{F} \rangle = \vec{0}$ .

On constate que cette onde de surpression ne crée pas de force en moyenne et ne peut donc pas assurer la lévitation de l'objet.

*Remarque :* on aurait pu tenir compte du terme de pression statique  $P_0(z)$  dans le calcul des forces de pression mais ce terme crée la poussée d'Archimède qui ne peut en aucun cas assurer la sustentation d'un objet solide plus dense que l'air.

**Q12.** L'hypothèse  $V_1 \ll c$  n'est plus vérifiée, l'approximation acoustique ne s'applique plus.

**Q13.** On peut penser à la relation de Bernoulli dans laquelle on somme les termes  $p$  et  $\mu \frac{v^2}{2}$ , on en déduit immédiatement  $\ell = 1$  et  $q = 2$  (une variante consiste à indiquer que la pression est une énergie volumique).

On commence par exprimer la composante de la force de surpression  $F_z = -\frac{\partial p_2}{\partial z} \times \frac{4\pi a^3}{3}$  :

$$F_z = \frac{4\pi a^3}{3} \times \left[ \frac{1}{4} \mu_0 V_1^2 \times \frac{2\omega}{c} \sin\left(\frac{2\omega}{c} z\right) - f'(z) \cos(2\omega t) \right]$$

Le premier terme constant s'identifie à sa moyenne et le second terme purement sinusoïdal

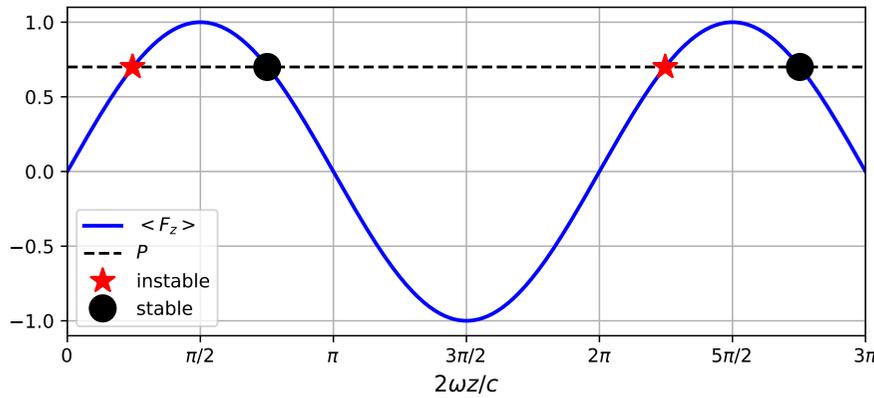
est de moyenne nulle, en conséquence :

$$\langle F_z \rangle = \frac{2\pi\mu_0\omega a^3 V_1^2}{3c} \sin\left(\frac{2\omega}{c}z\right)$$

**Q14.** Pour que des positions d'équilibre existent la norme du poids ne doit pas dépasser l'amplitude de la force de pression, c'est à dire, à la limite :

$$\frac{2\pi\mu_0\omega a^3 V_1^2}{3c} = \frac{4\pi a^3}{3} \mu_{b,\max} g \Leftrightarrow \mu_{b,\max} = \mu_0 \frac{\omega}{c} \times \frac{V_1^2}{2g}$$

Graphiquement, les positions d'équilibre sont associées au croisement des courbes donnant la force de pression et le poids (sur le graphique, les ordonnées sont normalisées à  $F_{max}$ ).



**Les positions étoilées sont des positions instables :** en effet supposons qu'un objet initialement dans une telle position se déplace légèrement vers les  $z$  croissants,  $\langle F_z \rangle$  augmente et l'objet s'éloigne encore plus.

**Les positions « disque » sont des positions stables :** en effet supposons qu'un objet initialement dans une telle position se déplace légèrement vers les  $z$  croissants,  $\langle F_z \rangle$  diminue, le poids l'emporte et l'objet redescend.

**Q15.**  $\mu_{b,\max} = \frac{1,2 \times 2\pi \times 2 \times 10^4 \times 50^2}{340 \times 2 \times 9,81} \Rightarrow \mu_{b,\max} \approx 5 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Pour des ondes de fréquence  $f = 20$  kHz, la longueur d'onde est de l'ordre de 2 cm ; comme on impose  $a \ll \lambda$ , on peut considérer un rayon maximal  $a_{\max} \approx 2$  mm, c'est à dire pour la masse maximale :

$$m_{b,\max} = \mu_{b,\max} \times \frac{4\pi a^3}{3} = 5 \times 10^4 \times \frac{4\pi \times 2^3 \times 10^{-9}}{3} \Rightarrow m_{b,\max} \approx 2 \text{ g}$$

**Si la masse volumique maximale est 50 fois supérieure à celle de l'eau, la masse que l'on peut réellement déplacer reste modeste à l'échelle macroscopique.**

**Q16.** Comme la résolution graphique de la question 14 le montre, deux positions d'équilibre stables sont séparées d'une distance  $\Delta z$  tel que :

$$\frac{2\omega\Delta z}{c} = 2\pi \Leftrightarrow \Delta z = \frac{\pi c}{\omega} = \frac{\pi}{2\pi} \times \frac{c}{f} \Leftrightarrow \Delta z = \frac{\lambda}{2}$$

Le nombre d'objet que l'on pourra faire léviter sera un nombre entier de l'ordre de  $\lfloor 2h/\lambda \rfloor$ .

**Q17.** L'objet oscille autour de sa position d'équilibre stable. Appliquons un principe fondamental de la dynamique à cet objet en projection selon la direction verticale, avec  $z = z_{eq} + \varepsilon$  et  $\varepsilon \ll z_{eq}$  (calcul à l'ordre 1 en  $\varepsilon$ ) :

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= -mg + F_{max} \sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) \\ &\approx -mg + F_{max} \sin\left(\frac{2\omega z_{eq}}{c}\right) + \varepsilon \times F_{max} \times \frac{2\omega}{c} \times \cos\left(\frac{2\omega z_{eq}}{c}\right) \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0 \text{ équilibre}}$

Avec  $\ddot{z} = \ddot{\varepsilon}$ , il vient :

$$\ddot{\varepsilon} + \left(-\frac{2\omega F_{max}}{mc} \cos\left(\frac{2\omega z_{eq}}{c}\right)\right) \times \varepsilon = 0$$

Les positions d'équilibre correspondent à un argument du cosinus  $\in ]\pi/2, \pi[ [2\pi]$  (cf. figure ci-contre), le cosinus est donc négatif et on est en présence d'une équation d'oscillateur harmonique de pulsation :

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{2\omega F_{max}}{mc} \left| \cos\left(\frac{2\omega z_{eq}}{c}\right) \right| = \frac{2\omega}{c} \times \frac{2\pi\mu_0\omega a^3 V_1^2}{3c} \times \frac{1}{\mu_b \times \frac{4\pi a^3}{3}} \times \left| \cos\left(\frac{2\omega z_{eq}}{c}\right) \right|$$

C'est à dire :  $\tilde{\omega} = \omega \frac{V_1}{c} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_b} \left| \cos\left(\frac{2\omega z_{eq}}{c}\right) \right|}$

*Remarque :* notons que cette pulsation est nettement inférieure à la pulsation de l'onde acoustique pour les valeurs des masses volumiques et des vitesses précédemment indiquées. Dans la même idée, le terme  $f(z) \cos(2\omega t)$  ne peut contribuer à une oscillation car la fréquence associée de 40 kHz semble bien trop élevée pour faire osciller l'objet.

**Q18.** Le dispositif convertit au sens de l'électronique de puissance une tension continue en une tension alternative, c'est un **onduleur**. Pour les applications, on peut citer :

- **alimentation de secours** pour un hôpital (réalisation d'une tension alternative 230 V efficace à partir de batteries) ;
- transfert sur le réseau électrique de l'énergie récupérée par des **panneaux solaires**.

**Q19.**  $K_1$  et  $K'_1$  ne peuvent être simultanément fermés sinon la source de tension est court-circuitée (de même pour  $K_2$  et  $K'_2$ ).

Si on suppose une charge inductive,  $K_1$  et  $K'_1$  ne peuvent être simultanément ouverts sinon la source de courant est placée en circuit ouvert (de même pour  $K_2$  et  $K'_2$ ).

**Les interrupteurs ( $K_1, K'_1$ ) fonctionnent en complémentarité (de même ( $K_2, K'_2$ )).**

Considérons les différentes situations :

- la condition  $u(t) = E$  nécessite  $K_1$  et  $K'_2$  fermés ;
- la condition  $u(t) = -E$  nécessite  $K'_1$  et  $K_2$  fermés.
- la condition  $u(t) = 0$  peut être réalisée avec  $K_1$  et  $K_2$  fermés ou  $K'_1$  et  $K'_2$  fermés.

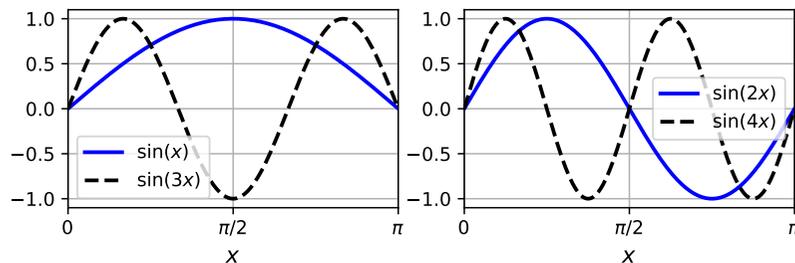
Le choix multiple sur la dernière condition autorise plusieurs options pour la commande des interrupteurs, une commande respectant une condition d'ouverture sur 50% du temps de chaque interrupteur est par exemple la suivante :

	$[0, t_0[$	$[t_0, T/2 - t_0[$	$[T/2 - t_0, T/2 + t_0[$	$[T/2 + t_0, T - t_0[$	$[T - t_0, T[$
$K_1$	1	1	0	0	1
$K'_1$	0	0	1	1	0
$K_2$	1	0	0	1	1
$K'_2$	0	1	1	0	0

**Q20.** Très généralement un développement en série de Fourier peut comporter des termes en sinus et des termes en cosinus.

Le choix de l'origine des temps génère une **fonction  $u$  impaire** ce qui assure l'**absence de termes en cosinus dans le développement de Fourier**.

Les sinus de pulsation  $(2p+1)\omega$  ont la même symétrie axiale que la fonction  $u$  par rapport à l'axe  $t = T/4$  ( $x = \pi/2$ ). Les sinus de pulsation  $(2p)\omega$  possède une symétrie différente (symétrie centrale par rapport au point  $t = T/4$  de l'axe des abscisses), ils ne peuvent servir à construire la fonction  $u$ .



**Q21.** En choisissant convenablement  $t_0$ , on peut annuler un des termes harmoniques (hors fondamental) ; il semble raisonnable d'annuler l'harmonique de plus bas rang associé à  $p = 1$ , les autres harmoniques pouvant plus facilement être filtrés (cf. questions suivantes).

D'après la figure 4, on retient  $t_0 = T/12$ . Notons la cohérence de ce résultat avec la formule donnant les  $b_i$  :

$$b_3 = \frac{4E}{3\pi} \times \cos\left(3 \times \frac{2\pi t_0}{T}\right) = \frac{4E}{3\pi} \times \cos\left(3 \times \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{12}\right) = 0$$

Avec cette valeur de  $t_0$  :

- fondamental :  $b_1 = \frac{4E}{\pi} \cos(\pi/6) = \frac{4E}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$  ;
- harmonique de rang 5 :  $b_5 = \frac{4E}{5\pi} \cos(10\pi/12) = -\frac{4E}{5\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$  ;
- harmonique de rang 7 :  $b_7 = \frac{4E}{7\pi} \cos(14\pi/12) = -\frac{4E}{7\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$  ;

$$|b_5| = b_1/5 \text{ et } |b_7| = b_1/7.$$

**Q22.** Commençons par calculer la grandeur efficace du signal  $u$  :

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{T} \times 2E^2 \left(\frac{T}{2} - 2t_0\right) \Rightarrow U = E\sqrt{1 - \frac{4t_0}{T}}$$

Le fondamental est purement sinusoïdal d'amplitude  $b_1 = \frac{4E}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi t_0}{T}\right)$  et donc de

$$\text{valeur efficace : } U_f = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}} \cos\left(\frac{2\pi t_0}{T}\right).$$

Pour  $t_0 = T/12$ ,  $U = E\sqrt{2/3}$  et  $U_f = \frac{2E}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}$ , on en déduit :

$$\tau = \frac{\sqrt{\frac{2E^2}{3} - \frac{4E^2}{\pi^2} \times \frac{3}{2}}}{\frac{2E}{\pi} \times \sqrt{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{2} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{6}{\pi^2}}$$

$$\text{On obtient } \tau \approx \frac{\pi}{2} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{6}{10}} \approx \frac{\pi}{2} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{30}} \approx \frac{\pi}{\sqrt{90}} \approx \frac{\pi}{10} \Rightarrow \tau \approx 0,3$$

Pour  $t_0 = 0$ ,  $U = E$  et  $U_f = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}}$ , c'est à dire :

$$\tau = \frac{\sqrt{1 - \frac{8}{\pi^2}}}{4/(\pi\sqrt{2})} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \sqrt{1 - \frac{8}{\pi^2}} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} \approx \sqrt{\frac{10}{8} - 1} \approx \sqrt{\frac{1}{4}} \approx 0,5$$

L'utilisation du passage par 0 et l'**élimination de l'harmonique de rang 3 permet d'atténuer le taux de distorsion** sans le rendre suffisamment faible d'où l'importance du filtrage.

**Q23.** Par application de la formule du pont diviseur de tension :

$$\frac{u_r}{u} = \frac{R}{R + jL\omega} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{u_r}{u} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \text{ avec } \omega_c = \frac{R}{L}}$$

Le dispositif réalise un **filtre passe-bas d'ordre 1** de fréquence de coupure  $\omega_c$ .

**Q24.** La fonction de transfert a pour module  $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$  et pour argument

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right).$$

Pour obtenir le signal de sortie il faut appliquer la fonction de transfert à chacun des termes du développement de Fourier de  $u$  à chaque fois pour la fréquence de l'harmonique considéré.

$$\boxed{u_r(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{b_{2p+1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2p+1)\omega}{\omega_c}\right)^2}} \sin\left[(2p+1)\omega t - \arctan\left(\frac{(2p+1)\omega}{\omega_c}\right)\right]}$$

**Q25.** Appelons  $c_i$  les amplitudes du développement de Fourier de  $u_r$  (avec  $\omega = \omega_c$ ) :

$$c_{2p+1} = \frac{b_{2p+1}}{\sqrt{1 + (2p+1)^2}}$$

Grâce aux expressions des  $b_i$  obtenues à la question **Q.21**, il vient :

$$c_1 = \frac{4E}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} ; |c_5| = \frac{4E}{5\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{26}} ; |c_7| = \frac{4E}{7\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{50}}$$

Et pour le rapport des amplitudes :

$$\boxed{\frac{|c_5|}{c_1} = \frac{1}{5\sqrt{13}} \approx \frac{1}{5 \times 3,5} \approx 6\%} \text{ et } \boxed{\frac{|c_7|}{c_1} = \frac{1}{35} \approx 3\%}$$

On peut donc quasiment confondre le signal  $u_r$  avec son fondamental :

$$u_r(t) \approx \frac{4E}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \boxed{u_r(t) \approx \frac{E\sqrt{6}}{\pi} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Le signal présente une amplitude de l'ordre de  $0,8E$  et possède un déphasage retard de  $\pi/4$ , équivalent à  $1/8$  de période (Cf. figure ci-contre).

