

CCMP PSI 2021 Physique 2

Vélocimétrie Laser Doppler

Corrigé proposé par Nicolas Choimet, PSI*, Eiffel Bordeaux

nicolas.choimet@live.fr

I. Principe de la vélocimétrie Laser

I.A. Montage à un faisceau

Q1 Pendant $\Delta t = \frac{1}{f_p}$, l'abscisse de la particule varie de $\Delta x = \vec{V} \cdot \hat{u}_x \Delta t = \frac{\vec{V} \cdot \hat{u}_e}{f_p}$. Or, d'après la figure, la distance parcourue par l'onde pendant $\Delta t = \frac{1}{f_p}$ vaut $\Delta x + \lambda_e = \frac{\vec{V} \cdot \hat{u}_e}{f_p} + \frac{c_0}{f_e}$; par ailleurs, comme l'onde se propage à la vitesse c_0 , l'onde parcourt la distance $c_0 \Delta t = \frac{c_0}{f_p}$. On en déduit : $\frac{c_0 - \vec{V} \cdot \hat{u}_e}{f_p} = \frac{c_0}{f_e}$, soit :

$$f_p = f_e \left(1 - \frac{\vec{V} \cdot \hat{u}_e}{c_0} \right)$$

Q2 Dans le référentiel \mathcal{R}' lié à la particule, le récepteur est mobile à la vitesse $-\vec{V}$ et la lumière diffusée se propage selon \hat{u}_d . On peut donc transposer le résultat précédent, ce qui donne :

$$f_d = f_p \left(1 + \frac{\vec{V} \cdot \hat{u}_d}{c_0} \right)$$

Q3 On en déduit la relation, compte tenu de l'hypothèse $\|\vec{V}\| \ll c_0$:

$$f_d = f_e \left(1 - \frac{\vec{V} \cdot \hat{u}_e}{c_0} \right) \left(1 + \frac{\vec{V} \cdot \hat{u}_d}{c_0} \right) \approx f_e \left(1 + \frac{\vec{V} \cdot (\hat{u}_d - \hat{u}_e)}{c_0} \right) = f_e + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_e) \cdot \vec{V}}{\lambda_e}$$

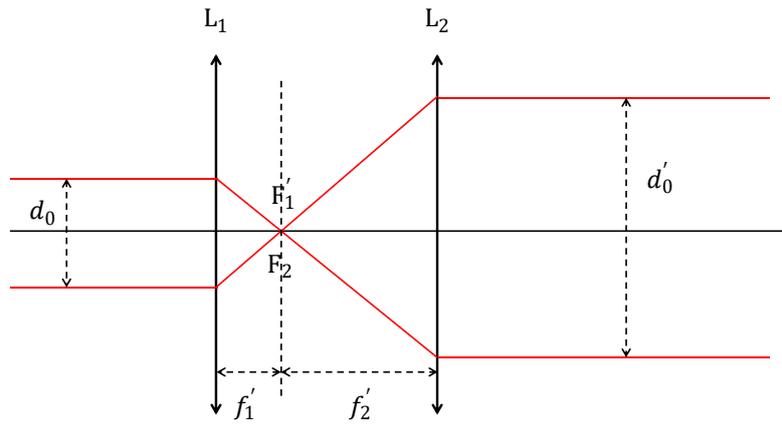
L'écart relatif en fréquence vaut donc au plus :

$$\frac{|f_d - f_e|_{\max}}{f_e} = \frac{\|\vec{V}\|}{c_0} \approx \frac{0,1}{3 \cdot 10^8} \approx 3 \cdot 10^{-10}$$

L'écart en fréquence est donc très inférieur à la fréquence f_e , ce qui rend sa mesure très délicate, de manière directe (c'est-à-dire sans isoler le terme correspondant à l'écart de fréquence).

I.B. Montage à deux faisceaux

Q4 Le faisceau émergent du système constitué des deux lentilles doit être un faisceau parallèle à l'axe optique. Il faut donc que le foyer principal image F'_1 de la lentille L_1 et le foyer principal objet F_2 de la lentille L_2 soient confondus.



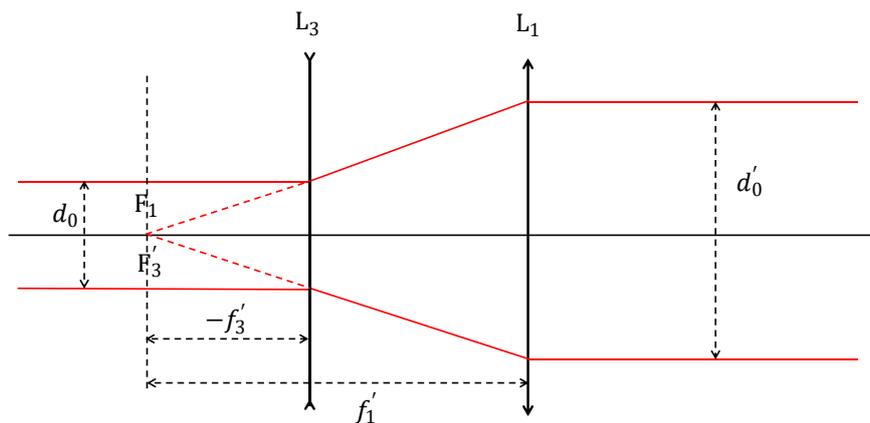
Dans ces conditions, la figure montre que : $\frac{d'_0}{f'_2} = \frac{d_0}{f'_1}$. Par conséquent :

$$d'_0 = d_0 \frac{f'_2}{f'_1}$$

On aura donc $d'_0 > d_0$ si $f'_2 > f'_1$.

L'encombrement de l'élargisseur de faisceau vaut $f'_1 + f'_2 = f'_1 \left(1 + \frac{d'_0}{d_0}\right) > f'_1$.

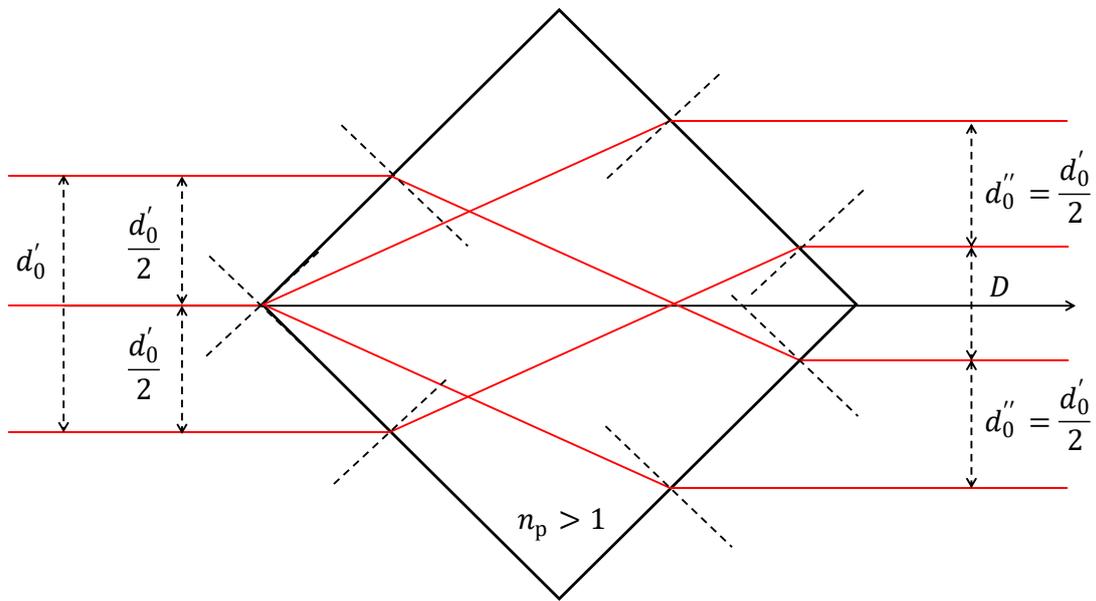
Pour réduire l'encombrement, on peut remplacer la lentille convergente L_2 par une lentille divergente L_3 disposée avant L_1 en faisant coïncider le foyer image principal F'_3 de la lentille L_3 avec le foyer objet principal F_1 de la lentille L_1 . Cela impose bien sûr la condition $f'_1 > -f'_3$:



On voit alors sur la figure que $\frac{d'_0}{f'_1} = -\frac{d_0}{f'_3}$ soit $d'_0 = -d_0 \frac{f'_1}{f'_3} > d_0$.

L'encombrement de l'élargisseur de faisceau vaut alors : $f'_1 + f'_3 = f'_1 \left(1 - \frac{d_0}{d'_0}\right) < f'_1$.

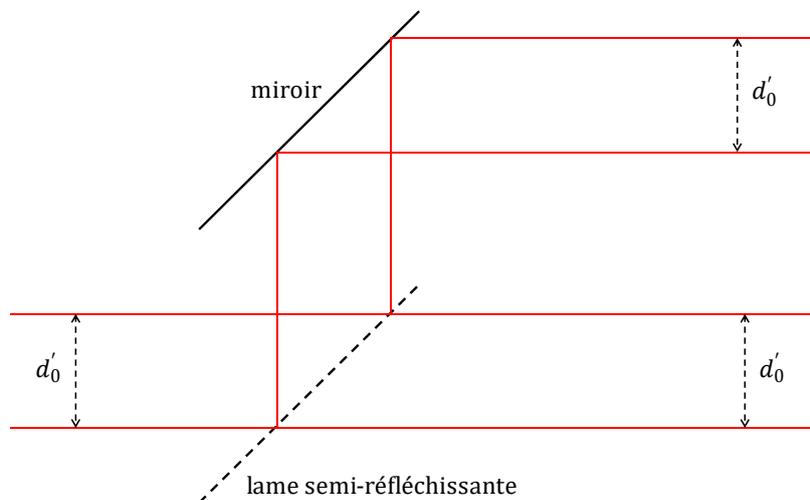
Q5 Voici le schéma illustrant le fonctionnement du diviseur d'ondes :



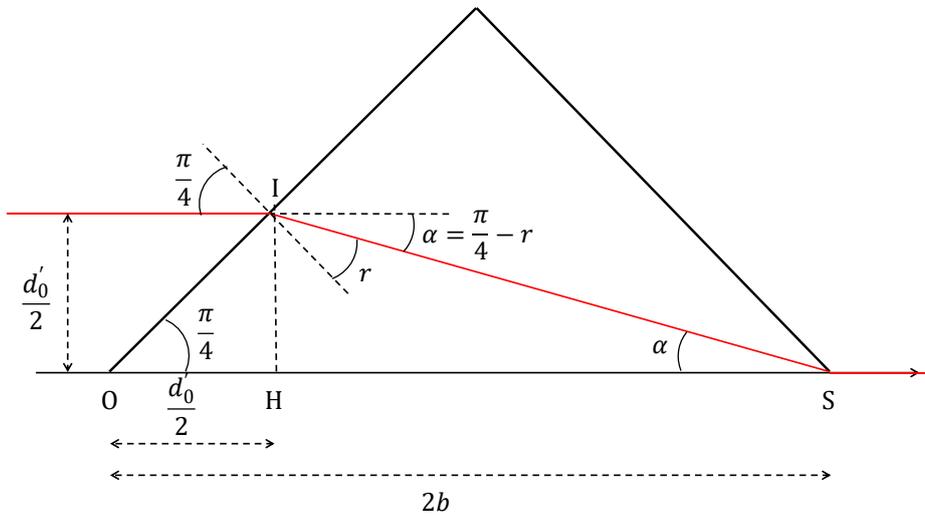
Comme le cube est à faces parallèles deux à deux, les rayons émergents ressortent du cube parallèlement aux rayons incidents (sous une incidence commune $\frac{\pi}{4}$). Par conséquent, $d''_0 = \frac{d'_0}{2}$.

Il s'agit d'un diviseur d'ondes à différence de marche nulle car aucun déphasage n'est introduit sur les deux voies.

On peut proposer un dispositif mettant en jeu une lame semi-réfléchissante orientée à 45° par rapport au faisceau incident, associée à un miroir parallèle à la lame. Le faisceau transmis ne subit aucun déphasage. Le faisceau réfléchi sur la lame puis sur le miroir subit deux déphasages consécutifs de π . Il n'y a donc pas non plus de déphasage global. Par conséquent, c'est aussi un diviseur d'ondes à différence de marche nulle. (NDLR : question hors programme)



- Q6** A la limite du non-recouvrement entre les deux faisceaux, le rayon incident le plus éloigné de l'axe optique soit émerger du séparateur en passant par le coin opposé S du séparateur :



On introduit le point H, projeté orthogonal du point I sur l'axe optique, et on voit sur la figure que :

$$2b = OH + HS = \frac{d'_0}{2} + \frac{d'_0}{2} \times \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{d'_0}{2} \left(\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

où $\alpha = \frac{\pi}{4} - r$. Or, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = n_p \sin r$ (2^e loi de Descartes pour la réfraction). On en déduit :

$$\begin{cases} \sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{4} - r\right) = \frac{\cos r}{\sqrt{2}} - \frac{\sin r}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2n_p^2}}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}n_p} \\ \cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{4} - r\right) = \frac{\cos r}{\sqrt{2}} + \frac{\sin r}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2n_p^2}}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}n_p} \end{cases}$$

Par conséquent :

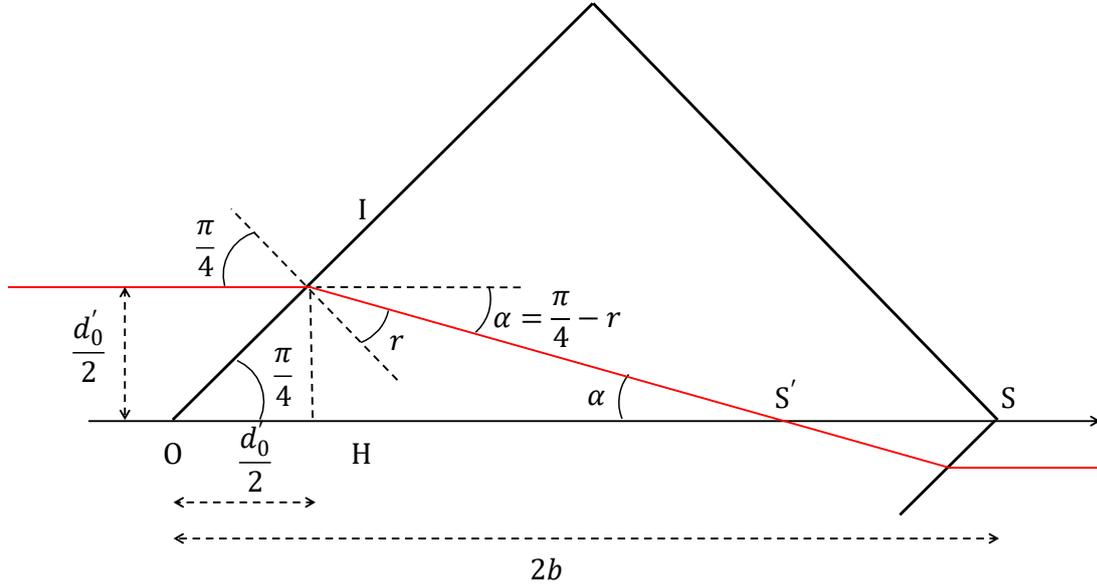
$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sqrt{1 - \frac{1}{2n_p^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2n_p^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}n_p}}$$

On en réduit finalement :

$$b = \frac{d'_0}{2} \frac{\sqrt{2n_p^2 - 1}}{\sqrt{2n_p^2 - 1} - 1}$$

Pour que les faisceaux soient séparés, il faut que le rayon précédemment considéré coupe l'axe optique en un point S' situé avant le point S . Autrement dit, il faut que :

$$OH + HS' < 2b$$



Tous les autres calculs restant valables, on en déduit la condition de séparation :

$$b > \frac{d'_0}{2} \frac{\sqrt{2n_p^2 - 1}}{\sqrt{2n_p^2 - 1} - 1}$$

Q7 Le résultat de la question Q3 permet d'écrire :

$$\begin{cases} f_{d1} = f_e + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_{e1}) \cdot \vec{V}}{\lambda_e} \\ f_{d2} = f_e + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_{e2}) \cdot \vec{V}}{\lambda_e} \end{cases}$$

Donc :

$$f_{d1} - f_{d2} = \frac{(\hat{u}_{e1} - \hat{u}_{e2}) \cdot \vec{V}}{\lambda_e}$$

Or, $\hat{u}_{e1} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{u}_z - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{u}_x$ et $\hat{u}_{e2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{u}_z + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{u}_x$. On en déduit :

$$f_{d1} - f_{d2} = -2 \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_x$$

Q8 L'intensité lumineuse reçue par le récepteur s'écrit :

$$I(t) = K \left| \underline{E}_{d1} + \underline{E}_{d2} \right|^2 = KE_0^2 |\exp(i2\pi f_{d1}t) + \exp(i2\pi f_{d2}t)|^2 = KE_0^2 |1 + \exp(i2\pi(f_{d2} - f_{d1})t)|^2$$

On en déduit :

$$I(t) = KE_0^2 |\exp(i\pi(f_{d2} - f_{d1})t) + \exp(i\pi(f_{d1} - f_{d2})t)|^2 = 4KE_0^2 \cos^2(\pi(f_{d2} - f_{d1})t)$$

soit :

$$I(t) = 2KE_0^2 (1 + \cos(2\pi(f_{d2} - f_{d1})t)) = 2 \underbrace{KE_0^2}_{\Lambda} \left(1 + \cos \left(\underbrace{4\pi \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) V_x}{\lambda_e}}_{\beta} t \right) \right)$$

La fréquence de clignotement de la lumière diffusée vaut donc :

$$f_c = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |V_x|}{\lambda_e}$$

Q9 Numériquement, $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{3,6 \times \pi}{2 \times 180}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{100}\right) \approx \frac{\pi}{100} \approx 3 \cdot 10^{-2}$. Donc :

$$f_c \approx \frac{2 \times 3 \cdot 10^{-2} \times 0,1}{5,2 \cdot 10^{-7}} \approx \frac{6}{5} \times 10^4 = 12 \text{ kHz}$$

Cette fréquence est facilement mesurable.

Dans le montage à un faisceau, il s'agissait de mesurer un écart relatif de fréquence égal à $3 \cdot 10^{-10}$ noyé dans le signal de fréquence $f_e = \frac{c}{\lambda_e} \approx 6 \cdot 10^{14}$ Hz, c'est-à-dire une fréquence égale à $6 \cdot 10^{14}$ Hz \pm 180 kHz. Le montage à deux faisceaux a permis de s'affranchir de la fréquence $6 \cdot 10^{14}$ Hz.

Q10 Le photodétecteur ne peut suivre les variations instantanées d'intensité diffusée que si son temps de réponse est très inférieur à la période du signal lumineux. Il faut donc que $\tau \ll \frac{1}{f_c}$. Pour fixer les idées, penons le critère $\tau f_c \leq \frac{1}{100}$. On en déduit que $|V_x| \leq \frac{\lambda_e}{200\tau \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

Numériquement, on trouve :

$$|V_x|_{\max} = V_{\max} = \frac{\lambda_e}{200\tau \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{5,2 \cdot 10^{-7}}{200 \times 4,4 \cdot 10^{-9} \times 3 \cdot 10^{-2}} \approx \frac{5}{2 \times 13} \times 100 \approx 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Les valeurs de V_x mesurables avec ce dispositif doivent donc être comprises entre $-20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $+20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q11 On ne peut mesurer que la composante V_x de la vitesse de l'écoulement car $\hat{u}_{e1} - \hat{u}_{e2}$ est porté par le vecteur \hat{u}_x .

Pour accéder simultanément aux trois composantes V_x , V_y et V_z , il faut utiliser trois lasers de couleurs différentes (il faut 3 longueurs d'onde différentes pour distinguer les signaux), émettant selon les trois directions de l'espace, suivis chacun d'un dispositif élargisseur-séparateur de faisceau et d'une lentille convergente dédiée faisant converger chaque paire de faisceaux dans la zone de mesure de la vitesse de l'écoulement.

Q12 L'impossibilité de distinguer le signe de V_x est liée au fait que les deux champs se superposent dans la zone d'étude (ce qui fait apparaître « mécaniquement » un cosinus, fonction paire). On pourrait avoir envie d'imposer un déphasage de π sur l'un des deux champs via une réflexion métallique, ce qui donnerait bien un sinus. Las ! Le capteur est

sensible au module carré du champ électrique (détecteur quadratique) et on verrait donc réapparaître le cosinus...

Q13 Reprenons les résultats obtenus aux questions Q7 et Q8. On a cette fois-ci :

$$\begin{cases} f_{d1} = f_e + f_B + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_{e1}) \cdot \vec{V}}{\lambda'_1} \approx f_e + f_B + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_{e1}) \cdot \vec{V}}{\lambda_e} \\ f_{d2} = f_e + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_{e2}) \cdot \vec{V}}{\lambda_e} \end{cases}$$

car $\lambda'_1 = \frac{c_0}{f_e + f_B} \approx \frac{c_0}{f_e} = \lambda_e$ (f_B est la fréquence d'une onde acoustique : même pour des ultrasons, $f_B \ll f_e$)

Donc :

$$f_{d1} - f_{d2} = f_B - 2 \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_x$$

On en déduit la fréquence de clignotement :

$$f_c = |f_{d1} - f_{d2}| = \left| f_B - 2 \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_x \right|$$

La fréquence de clignotement doit rester positive quelle que soit V_x . La seule expression compatible avec cette contrainte est donc :

$$f_c = f_B - 2 \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_x$$

On voit que la fréquence de clignotement dépend cette fois-ci du signe de V_x : la mesure de cette fréquence nous renseigne donc sur la valeur algébrique de V_x .

On veut pouvoir mesurer V_x dans l'intervalle $\left[-\frac{V_{\max}}{2}, \frac{V_{\max}}{2}\right]$ donc f_c est comprise dans l'intervalle $\left[f_B - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max}, f_B + \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max}\right]$. Le photodétecteur impose toujours la condition : $\tau f_c \leq \frac{1}{100}$. Cette condition doit être vérifiée pour toutes les valeurs de f_c . Par conséquent, il faut que : $\tau \left(f_B + \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max}\right) \leq \frac{1}{100}$, soit :

$$f_B \leq \frac{1}{100\tau} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max}$$

En même temps, f_B doit être supérieure à $2 \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} \frac{V_{\max}}{2} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max}$ pour que f_c soit positive. Par conséquent :

$$\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max} < f_B \leq \frac{1}{100\tau} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max}$$

Or (cf Q10), $\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\lambda_e} V_{\max} = \frac{1}{200\tau}$. Par conséquent :

$$\frac{1}{200\tau} < f_B \leq \frac{1}{200\tau}$$

Il semble donc que la valeur optimale soit de l'ordre de $\frac{1}{200\tau}$ (sans doute un peu au-dessus pour que f_c ne soit pas nulle). Numériquement, on trouve : $f_B \approx \frac{1}{200\tau} = \frac{10^7}{2 \times 4,4} \approx 1$ MHz.

II. Application à la mesure d'un profil de Poiseuille

Q14 Le nombre de Reynolds d'un tel écoulement interne s'écrit $Re = \frac{\mu \times 2R \times U}{\eta}$ où $U = \frac{Q}{\pi R^2}$ est la vitesse débitante (vitesse moyennée sur une section de l'écoulement). Par conséquent :

$$Re = \frac{2 \mu Q}{\pi \eta R}$$

L'écoulement est laminaire si $Re \ll 2000$.

Q15 L'écoulement étant incompressible, $\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Par conséquent, $\vec{v} = v(r) \hat{u}_x$.

Considérons la particule de fluide cylindrique d'axe (Ox) , de rayon r , de longueur L . Comme le champ des vitesses ne dépend ni de x ni du temps, tous les points de la particules de fluide sont en translation rectiligne et uniforme. Il en est de même de son centre de masse G . Le principe fondamental de la dynamique donne donc, en projection sur l'axe (Ox) :

$$0 = P_e \pi r^2 - (P_e - \Delta P) \pi r^2 + 2\pi \eta L r \frac{dv}{dr}$$

Par conséquent,

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r$$

On en déduit :

$$v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2 + B$$

La condition aux limites sur la paroi du tube traduit le non-glissement du fluide : $v(R) = 0$. On en déduit :

$$v(r) = \frac{R^2 \Delta P}{4\eta L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

On a bien $v(r) = A \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^q\right)$ où $A = \frac{R^2 \Delta P}{4\eta L}$ et $q = 2$.

Le débit de volume vaut, par définition :

$$Q = \iint_{\text{section}} v(r) dS = 2\pi A \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = \frac{\pi}{2} A R^2$$

Q16 Le profil de vitesse de l'écoulement (2) est sensiblement parabolique (écoulement de Poiseuille cylindrique), ce qui n'est pas vraiment le cas de l'écoulement (1) dont la vitesse « sature » sur une large zone. L'écoulement (2) est donc le plus proche d'un écoulement laminaire.

Pour l'écoulement (2), on peut utiliser la relation $Q = \frac{\pi}{2}AR^2$ et estimer A sur la courbe : $A = v(0) = 70 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. On en déduit : $Q \approx \frac{3 \times 70 \cdot 10^{-3} \times 1,3^2 \times 10^{-4}}{2} \approx 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour l'écoulement (1), on note que la vitesse est sensiblement constante ($V \approx 70 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$) jusqu'à une distance à l'axe de l'ordre de $R_0 \approx 8 \text{ mm}$ et on néglige la contribution de l'écoulement extérieur à ce rayon. On a donc : $Q \approx \pi R_0^2 V \approx 3 \times 8^2 \times 10^{-6} \times 70 \cdot 10^{-3} \approx 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour l'écoulement (2),

$$\text{Re} = \frac{2 \mu Q}{\pi \eta R} \approx \frac{2 \times 1,2 \cdot 10^3 \times 1,8 \cdot 10^{-5}}{3 \times 5,5 \cdot 10^{-3} \times 1,3 \cdot 10^{-2}} = \frac{3,6 \times 1,2}{3,9 \times 5,5} \times 10^3 \approx \frac{1,4}{1,3 \times 5,5} \times 10^3 \approx \frac{1,4}{7} \times 10^3 \approx 200$$

On a bien $\text{Re} \approx \frac{2000}{10}$: l'écoulement est sensiblement laminaire.

Pour l'écoulement (1) :

$$\text{Re} = \frac{2 \mu Q}{\pi \eta R} \approx \frac{2 \times 10^3 \times 1,4 \cdot 10^{-5}}{3 \times 10^{-3} \times 1,3 \cdot 10^{-2}} = \frac{2,8}{3,9} \times 10^3 \approx \left(\frac{2,6}{3,9} + \frac{0,2}{3,9} \right) \times 10^3 \approx \left(\frac{2}{3} + 0,05 \right) \times 10^3 \approx 700$$

Ici, l'écoulement vérifie encore $\text{Re} < 2000$, mais le nombre de Reynolds se rapproche de la valeur critique. L'écoulement est encore probablement laminaire (lignes de courant régulières), mais pas « rampant », c'est-à-dire qu'il n'est plus dominé par la viscosité. La loi de Poiseuille n'y est manifestement pas valable compte tenu de l'allure du profil de vitesse.

III. Application à l'étude d'ondes acoustiques

III.A. Onde acoustique guidée

Q17 On introduit les perturbations $p_1(x, t)$, $\mu_1(x, t)$ et $\vec{v}_1(x, t) = v_1(x, t)\hat{u}_x$ de la pression, de la masse volumique ainsi que la vitesse locale dus à l'onde acoustique. L'approximation acoustique consiste à supposer

$$\begin{cases} |p_1(x, t)| \ll P_0 \\ |\mu_1(x, t)| \ll \mu_0 \\ \|\vec{v}_1(x, t)\| \ll c \end{cases}$$

et à négliger tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 dans les équations de couplage liant ces 3 grandeurs (acoustique linéaire).

Les trois équations de couplage linéarisées s'écrivent :

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1 \end{cases}$$

On en déduit l'équation de propagation de la surpression acoustique :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

Q18 La célérité du son est donnée par $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$. Or, pour un gaz parfait en évolution isentropique, la loi de Laplace donne : $P \mu^{-\gamma} = \text{constante}$. En différentiant logarithmiquement la loi de Laplace, on obtient : $\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\mu}{\mu} = \frac{p_1}{P_0} - \gamma \frac{\mu_1}{\mu_0} = 0$. On en déduit :

$$\chi_s = \frac{\mu_1}{\mu_0 p_1} = \frac{1}{\gamma P_0}$$

On en déduit :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}$$

Numériquement, on trouve :

$$c = \sqrt{\frac{1,4 \times 10^5}{1,2}} \approx 100\sqrt{12} \approx 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q19 Pour une OPPM variant en $\exp i(\omega t - kx)$, l'équation $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$ donne, en notation complexe : $i\omega \mu_0 \underline{v_1} = ik \underline{p_1}$. On en déduit :

$$\frac{\underline{p_1}}{\underline{v_1}} = \mu_0 \frac{\omega}{k}$$

Or, la relation de dispersion d'une OPPM s'obtient grâce à l'équation de propagation :

$$\omega^2 = c^2 k^2$$

soit $\omega = ck$ pour une OPPM se propageant vers les x croissants. On en déduit l'impédance acoustique :

$$Z_a = \frac{\underline{p_1}}{\underline{v_1}} = \frac{p_1}{v_1} = \mu_0 c$$

Le vecteur de Poynting acoustique moyen est donné par :

$$\vec{\pi} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{p_1} \overline{\underline{v_1}}^* \right) = \frac{Z_a v_m^2}{2} \hat{u}_x$$

L'intensité acoustique est définie par :

$$I_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{\|\vec{\pi}\|}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{Z_a v_m^2}{2I_0} \right)$$

On en déduit :

$$v_m = \sqrt{\frac{2I_0}{Z_a} 10^{(I_{\text{dB}}/10)}}$$

Pour $I_{\text{dB}} = 120 \text{ dB}$, on obtient :

$$v_m = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-12}}{1,2 \times 340}} 10^{12} = \sqrt{\frac{1}{0,6 \times 340}} \approx \frac{1}{10\sqrt{2}} \approx 7 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le vélocimètre à deux lasers permettait de mesurer des vitesses allant jusqu'à $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. De plus, l'énoncé évoquait à plusieurs reprises des vitesses de l'ordre de $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$: v_m est donc parfaitement mesurable, *a priori*.

- Q20** Les conditions aux limites imposées en $z = 0$ et $z = a$ ne permettent plus de chercher des solutions en OPPM. Toutefois, on cherche ici des solutions sinusoïdales se propageant selon \hat{u}_x : par conséquent, $p_1(M, t) \propto \cos(\omega t - kx + \phi)$. Pour tenir compte des conditions aux limites, il faut donc introduire un facteur dépendant de z . On écrit donc :

$$p_1(M, t) = p(z) \cos(\omega t - kx + \phi)$$

Cette onde est sinusoïdale (dépendance temporelle sinusoïdale), progressive selon \hat{u}_x (car $k > 0$), mais elle n'est pas plane à cause du facteur $p(z)$.

- Q21** On injecte cette solution dans l'équation de propagation $\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} \right)$:

$$-\omega^2 p(z) = c^2 p''(z) - c^2 k^2 p(z)$$

soit :

$$p''(z) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) p(z) = 0$$

Les conditions aux limites imposées $z = 0$ et $z = a$ ne peuvent être vérifiées que si la fonction $p(z)$ est sinusoïdale : cela implique $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \kappa^2 > 0$. Par conséquent :

$$p''(z) + \kappa^2 p(z) = 0$$

Les solutions de cette équation s'écrivent :

$$p(z) = A \cos(\kappa z) + B \sin(\kappa z)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} B = 0 \\ -\kappa A \sin(\kappa a) = 0 \end{cases}$$

On en déduit : $\kappa a = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, les solutions compatibles avec les conditions aux limites s'écrivent :

$$p_n(z) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Le mode $n = 0$ correspond à $p_0(z) = A_0$: l'onde de pression est alors une onde plane progressive harmonique de pulsation $\omega = ck$. **Fondamental ? Question mal posée.**

- Q22** Le mode propre numéro n s'écrit donc :

$$p_{1n}(M, t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos(\omega t - kx + \phi_n)$$

Cherchons-en la relation de dispersion en l'injectant dans l'équation de propagation :

$$-\omega^2 = -c^2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - c^2 k^2$$

On obtient donc :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{c,n}^2}{c^2}$$

où $\omega_{c,n} = \frac{n\pi c}{a}$.

L'onde ne peut se propager que si k est réel, c'est-à-dire si $\omega > \omega_{c,n}$. On remarque que pour $n = 0$, il n'y a pas de pulsation de coupure ($\omega_{c,0} = 0$) : toute onde plane ($n = 0$) peut donc se propager, quelle que soit sa fréquence.

Supposons donc que l'on considère le mode n et que $\omega > \omega_{c,n}$. Dans ce cas, on peut écrire :

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}}$$

La vitesse de phase de ce mode est donnée par :

$$v_{\phi,n}(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}}}$$

Différentions la relation de dispersion quadratique :

$$2k dk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$$

On en déduit :

$$v_{g,n}(\omega) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_{\phi}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}}$$

On constate que la vitesse de phase est supérieure à c , tandis que la vitesse de groupe est inférieure à c .

D'autre part, quand $\omega \rightarrow \omega_{c,n}^+$, $v_{\phi,n}(\omega) \rightarrow +\infty$ tandis que $v_{g,n}(\omega) \rightarrow 0$, les deux vitesses dépendent fortement de ω : dans ce domaine de fréquence, la dispersion est très forte.

Enfin, $\omega \rightarrow +\infty$, $v_{g,n}(\omega) \approx v_{\phi,n}(\omega) \approx c$: la dispersion disparaît à très haute fréquence.

Q23 Le mode propre fondamental est le seul à pouvoir se propager si $\omega < \omega_{c,1}$, c'est-à-dire si $\frac{2\pi c}{\lambda} < \frac{\pi c}{a}$. On en déduit la condition de propagation monomode :

$$a < \frac{\lambda}{2}$$

Numériquement, $\frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} \approx \frac{340}{2 \times 40 \cdot 10^3} \approx 4,25$ mm. Par conséquent, a doit être inférieur à 4,2 mm pour avoir une propagation monomode (mode fondamental seul).

Q24 Les modes (n, m) de fréquence $f = 40$ kHz pouvant se propager doivent vérifier la condition $2\pi f > \mu_{nm} \frac{c}{a}$, c'est-à-dire :

$$\mu_{nm} < \frac{2\pi f a}{c}$$

Numériquement, $\frac{2\pi f a}{c} = \frac{2\pi a}{\lambda} \approx \frac{3 \times 11 \cdot 10^{-3}}{8,5 \cdot 10^{-3}} = \frac{33}{8,5} \approx 3,9$.

On en déduit que les modes (0,1), (1,1), (2,1) et (0,2) peuvent se propager le long du guide acoustique circulaire.

Q25 La vitesse de groupe d'un paquet d'onde de fréquence fixée ($f = 40$ kHz) dépend du mode considéré :

$$v_{g,nm}(\omega) = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{c,nm}^2}{\omega^2}} = c \sqrt{1 - \left(\mu_{nm} \frac{c}{2\pi f a}\right)^2}$$

Plus μ_{nm} est grand, plus la vitesse de groupe du mode (n, m) est petite.

Sur les 4 modes (0,1), (1,1), (2,1) et (0,2) pouvant se propager, les deux modes ayant les vitesses de groupes les plus proches sont ceux dont les valeurs de μ_{nm} sont les plus proches : il s'agit des modes (2,1) et (0,2) pour lesquels $\mu_{21} = 3,1$ et $\mu_{02} = 3,8$. Ces deux modes sont séparés en sortie si la différence de leurs temps de propagation est supérieure à la durée d'une salve. Il faut donc que :

$$\frac{L}{v_{g,02}} - \frac{L}{v_{g,21}} > \frac{4}{f}$$

En supposant que $\left(\mu_{nm} \frac{c}{2\pi f a}\right)^2 \ll 1$, on peut écrire :

$$\frac{1}{v_{g,02}} - \frac{1}{v_{g,21}} \approx \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\mu_{02} \frac{c}{2\pi f a}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\mu_{21} \frac{c}{2\pi f a}\right)^2 \right) \right) = \frac{1}{2c} \left(\frac{c}{2\pi f a}\right)^2 (\mu_{02}^2 - \mu_{21}^2)$$

On en déduit la condition :

$$L > \frac{8c}{f} \left(\frac{2\pi f a}{c}\right)^2 \frac{1}{(\mu_{02}^2 - \mu_{21}^2)}$$

soit :

$$L > \frac{32\pi^2}{(\mu_{02} - \mu_{21})(\mu_{02} + \mu_{21})} \frac{a^2 f}{c}$$

Numériquement, on trouve :

$$\frac{32\pi^2}{(\mu_{02} - \mu_{21})(\mu_{02} + \mu_{21})} \frac{a^2 f}{c} \approx \frac{32 \times 10 \times 121 \cdot 10^{-6} \times 40 \cdot 10^3}{0,7 \times 6,9 \times 340} \approx \frac{155 \times 10}{5 \times 340} = \frac{155}{170} = 1 - \frac{15}{170} = 1 - \frac{3}{34} \approx 0,9 \text{ m}$$

La longueur du tube doit donc être supérieure à 90 cm.

III.B. Production de l'onde acoustique

Q26 On applique la loi des nœuds à l'entrée inverseuse de l'ALI :

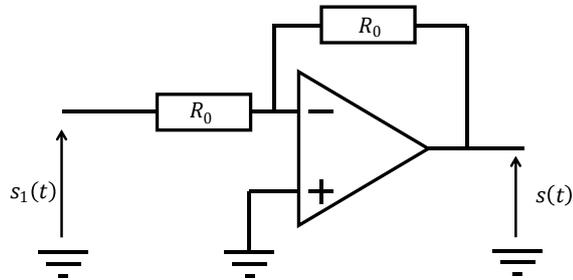
$$\frac{e_1 - V^-}{R_1} + \frac{e_2 - V^-}{R_2} = \frac{V^- - s_1}{R}$$

L'ALI, supposé idéal, est bouclé sur son entrée inverseuse (rétroaction négative pure) donc il est stable et fonctionne en régime linéaire. Par conséquent : $V^- = 0$.

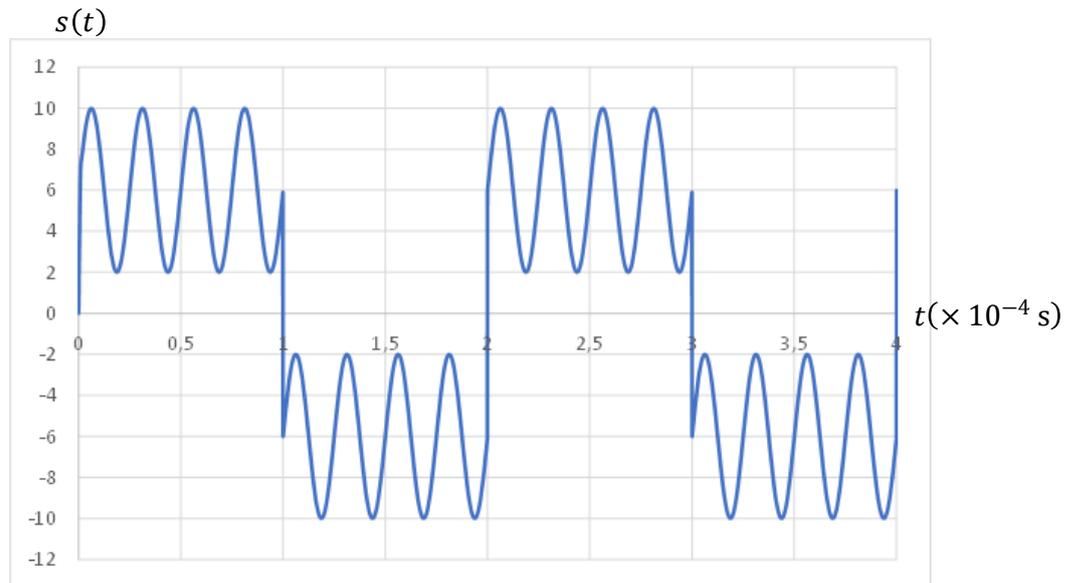
On en déduit :

$$s_1 = -R \left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} \right)$$

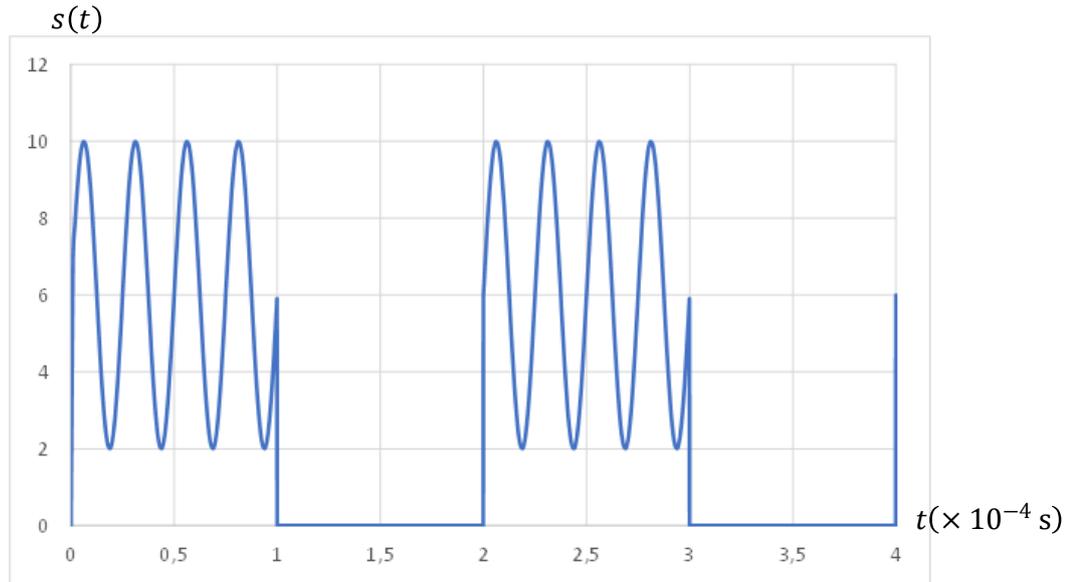
Pour obtenir $s = -s_1$, il suffit d'insérer entre la sortie du montage proposé et la sortie où l'on récupère s un amplificateur inverseur de gain -1 , mettant œuvre en ALI et deux résistances R_0 identiques :



Q27 En choisissant $R = R_1 = R_2$, on obtient : $s = e_1 + e_2$. Par conséquent :



Q28 Si l'ALI est alimenté en $+15\text{ V}$ et 0 V , la tension de sortie est nécessairement comprise entre 0 V (tension de saturation basse) et $+15\text{ V}$ (tension de saturation haute). Par conséquent, les portions négatives du signal précédent sont « écrêtées » à 0 V :



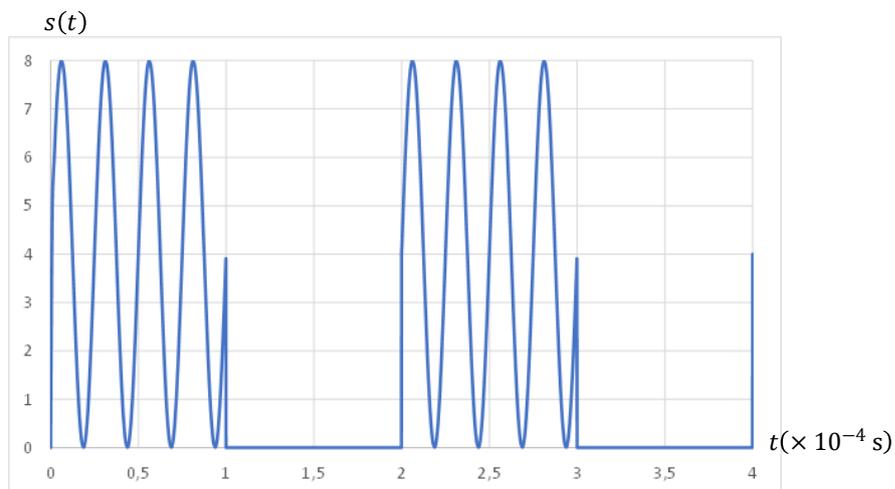
On obtient effectivement des salves de fréquence 40 kHz de durée 100 μ s, émises toutes les 200 μ s, de valeur moyenne 6 V et d'amplitude 4 V.

- Q29** L'ALI LM 741 ayant une vitesse de balayage modeste ($\sigma = 0,5 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$), les discontinuités (d'amplitude $\Delta s = 6 \text{ V}$) imposées au signal aux instants $t_n = n \times 100 \mu\text{s}$ ne seront pas bien rendues. En effet, le temps Δt de montée ou de descente du LM 741 vaudra alors :

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{\sigma} = \frac{6}{0,5} = 12 \mu\text{s}$$

Cette durée n'est pas négligeable par rapport à 100 μ s.

Pour minimiser ce défaut sans changer d'ALI, il faut diminuer la valeur des discontinuités de tension. Pour ce faire, on peut diminuer l'amplitude du créneau et choisir la plus petite valeur compatible avec le but recherché, à savoir : 4 V d'amplitude (ou 8 V crête à crête). Cela donne :



La durée de commutation est ramenée à $\Delta t = \frac{\Delta s}{\sigma} = \frac{4}{0,5} = 8 \mu\text{s}$. Si l'on veut encore gagner en rapidité, il faut alors également diminuer l'amplitude de la sinusoïde (tout en conservant des amplitudes crête à crête égales pour les deux signaux).

III.C. Ensemencement

Q30 On reconnaît la loi de force de Stokes, donnant la traînée subie par une sphère à condition que le nombre de Reynolds soit très inférieur à 1. La vitesse relative $v_p - v_f$ vaut au plus l'amplitude $v_m \approx 7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ calculée à la question Q19. Par conséquent :

$$\text{Re}_{\text{max}} = \frac{\mu_f d_p v_m}{\eta_f} = \frac{1,2 \times 10^{-6} \times 7 \cdot 10^{-2}}{1,8 \cdot 10^{-5}} = \frac{84}{18} \times 10^{-3} = \frac{14}{3} \times 10^{-3} \approx 5 \cdot 10^{-3}$$

On a donc bien $\text{Re} \ll 1$ (écoulement externe), donc la traînée est visqueuse et suit la loi de Stokes.

Q31 Ecrivons l'équation du mouvement de la particule projetée sur l'axe de l'écoulement, en négligeant le poids, la poussée d'Archimède et la force exercée par les faisceaux Laser, conformément aux indications de l'énoncé :

$$m_p \frac{dv_p}{dt} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d_p}{2} \right)^3 \mu_p \frac{dv_p}{dt} = -3\pi\eta_f d_p (v_p - v_f)$$

soit :

$$\left(\frac{\mu_p d_p^2}{18 \eta_f} \right) \frac{dv_p}{dt} + v_p = v_f$$

En régime sinusoïdal forcé, on en déduit :

$$\frac{v_p}{v_f} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + i \frac{f}{f_0}}$$

où :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{18 \eta_f}{\mu_p d_p^2} = \frac{9\eta_f}{\pi \mu_p d_p^2}$$

Numériquement, on trouve :

$$f_0 \approx \frac{9 \times 1,8 \cdot 10^{-5}}{3 \times 10^3 \times 10^{-12}} \approx 54 \text{ kHz}$$

Q32 Pour mesurer la vitesse du fluide, il faut bien sûr que $v_p \approx v_f$. Il faut donc que $f \ll f_0$.

A la fréquence $f = 40 \text{ kHz}$, $\frac{f}{f_0} = \frac{40}{54} = \frac{20}{27} = 1 - \frac{7}{27} \approx 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Par conséquent,

$$\left| \frac{v_p}{v_f} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Assimiler la vitesse de la particule à la vitesse du fluide conduit donc à une erreur relative de 20 %, ce qui n'est pas acceptable.

Pour commettre une erreur inférieure à 1 %, il faut que $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} > 0,99$ soit :

$$1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 < \frac{100^2}{99^2}$$

On peut reformuler ainsi ce résultat : $\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 < \frac{100^2 - 99^2}{99^2}$.

Or, $\frac{100^2 - 99^2}{99^2} = \frac{(100-99)(100+99)}{99^2} = 0,01 \times \frac{199}{99^2} \approx 0,01 \times \frac{200}{100^2} = 2 \cdot 10^{-4}$. On en déduit :

$$\sqrt{\frac{100^2 - 99^2}{99^2}} \approx 10^{-2} \sqrt{2} \approx 1,4 \cdot 10^{-2}$$

Par conséquent, il faut :

$$f < 1,4 \cdot 10^{-2} \times f_0$$

soit :

$$f < 760 \text{ Hz}$$

Ces particules ne sont donc adaptées qu'à l'étude des infrasons et des sons audibles graves, mais absolument pas à l'étude des sons audibles aigus, et encore moins à l'étude des ultrasons. Pour étudier des ondes acoustiques de fréquence plus élevée, il faut augmenter la valeur de f_0 et donc utiliser des particules plus petites (mais cela poserait la question de l'efficacité de la rétrodiffusion) et surtout moins denses.