PSI2. Formulaire de maths pour la physique. Bases de Sup

A MAITRISER A L'ENTREE EN SPE :

M01.Formes remarquables.

A SAVOIR DETECTER DANS LES CALCULS.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Les nombres complexes le sont effectivement et il convient de faire attention. Le physicien a généralement la coutume (un peu lourde) de faire ressortir ce danger potentiel en soulignant les nombres complexes. Ne pas souligner permet d'aller plus vite, éventuellement dans le mur.

M02.Résolution de systèmes d'équations linéaires.

A)cas général : n équations linéaires à n inconnues.

Les inconnues sont x_j pour j compris entre 1 et n.
Le système d'équations peut s'écrire :

$$Pour\ i\ compris\ entre\ 1\ et\ n \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

Si on définit le vecteur colonne [X] dont la composante j est x_j, le vecteur colonne [B] dont la composante i est b_i, A la matrice carrée (n,n) dont l'élément courant est a_{ij}, le système d'équations s'écrit sous la forme simplifiée :

$$A[X] = [B]$$

et on a alors un problème d'algèbre linéaire.

Résoudre le système revient à calculer si possible la matrice inverse A^{-1} de façon à sortir :

$$[X] = A^{-1}[B]$$

On alors les résultats suivants à absolument connaître :

a)si $det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible (l'application linéaire associée à la matrice A est une bijection) et il existe une unique solution au problème. Le système d'équations porte alors le nom de SYSTEME DE CRAMER.
A titre d'exemple important, dans le cas (a) avec [B] vecteur nul, alors l'unique solution est [A] nul.

b) si $(A) = 0$, la matrice n'est pas inversible et on a deux cas possibles :
b1)le nombre de solutions est infini.
b2)il n'y a aucune solution.
Dans le cas (b) en physique, on a généralement une solution évidente qui permet de sélectionner le cas b1. Voir exemple 1 page suivante.

B)p équations linéaires à n inconnues. p ≠ n.

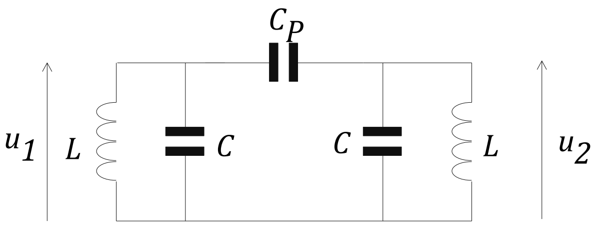
Si p>n, il n'y a généralement aucune solution sauf par exemple, si les équations excédentaires aux n premières sont des combinaisons linéaires des n premières.

Si p<n, on peut fixer arbitrairement la valeur de (n-p) variables et on retombe sur un système de p équations à p inconnues. Retour au II.A.

C)p équations quelconques à n inconnues.

*En physique, on se permet souvent de généraliser les résultats précédents car cela marche souvent très bien **a posteriori** MAIS la démonstration n'en a pas été faite. Il convient donc de se méfier et de bien surveiller les contradictions ou résultats aberrants qui pourraient apparaître dans la suite des calculs.*

Exemple n°1 :



On étudie le régime libre du circuit électrique ci-dessus. On postule l'existence d'un régime permanent sinusoïdal de pulsation ω inconnue. Dans le cas où il existe, on peut alors utiliser la notation complexe pour relier les amplitudes complexes $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_2$ asssociées à $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

On obtient alors :

$$[1 - L(C + C_P)\omega^2]\underline{u}_1 \ + \ LC_P\omega^2\underline{u}_2 \ = \ 0$$
$$LC_P\omega^2\underline{u}_1 \ + \ [1 - L(C + C_P)\omega^2]\underline{u}_2 \ = \ 0$$

On a ici un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ dont une solution évidente est (0,0).

Si le système est de Cramer, c'est la seule solution. Pour avoir un nombre de solutions infinies, il faut donc que son déterminant soit nul, ce qui va nous donner les valeurs possibles pour ω.

On calcule :

$$\Delta = [1 - L(C + C_P)\omega^2]^2 - [LC_P\omega^2]^2$$

On reconnaît une forme remarquable :

$$\Delta = [1 - L(C + 2C_P)\omega^2][1 - LC\omega^2]$$

Et on peut maintenant sortir les deux solutions possibles :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ou \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L(C + 2C_P)}}$$

Un régime libre quelconque sera une combinaison linéaire des deux sinusoïdes possibles. C'est un régime non amorti car non résistif : il n'y a aucune perte d'énergie. Expérimentalement, ce n'est évidemment pas réaliste.

Exemple n°2. Le déterminant n'est pas forcément nécessaire.

Trois vecteurs complexes $\underline{\vec{A}}$, $\underline{\vec{B}}$, $\underline{\vec{C}}$ sont reliés par :

$$\underline{\vec{A}} \ + \ \underline{\vec{B}} \ = \ \underline{\vec{C}}$$
$$n_1(\underline{\vec{A}} \ - \ \underline{\vec{B}}) \ = n_2 \ \underline{\vec{C}}$$

n_1 et n_2 sont des réels supérieurs ou égaux à 1. Exprimer deux des vecteurs en fonction seulement du troisième. Que peut-on affirmer si un des vecteurs est réel ?

Il suffit de diviser la seconde équation par n_1.

La demi-somme donnera $\underline{\vec{A}}$ en fonction de $\underline{\vec{C}}$

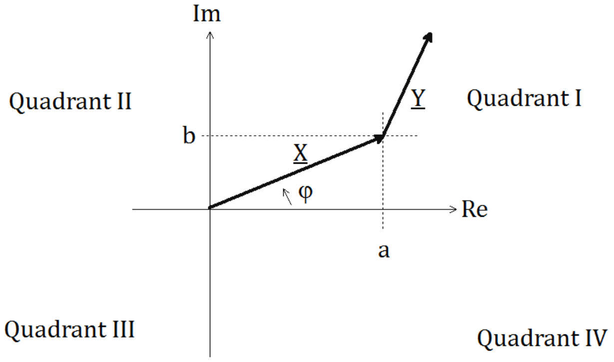
La demi-différence donnera $\underline{\vec{B}}$ en fonction de $\underline{\vec{C}}$

Si un des trois est réel, les deux autres aussi.

M03.Les complexes.

En physique, le nombre complexe de module 1 et d'argument π/2 est noté j et vérifie $j^2=-1$. D'une manière générale, un nombre complexe est souligné, sauf pour j. Son conjugué est noté avec * en exposant.

Ecritures et représentation d'un nombre complexe.



Sur le dessin ci-dessus, on peut considérer un complexe comme un vecteur du plan. Dessiner le complexe $\underline{X}+\underline{Y}$ sur le dessin ci-dessus.
Un nombre complexe $\underline{X}$ peut s'écrire :

a)sous la forme polaire $\underline{X} = X \cdot exp(j\varphi)$ où $X \geq 0$ est le module ou norme, et φ défini modulo 2π est l'argument ou la phase. Notation adaptée à la multiplication et la division.
Un nombre complexe et son inverse ont des normes inverses et des arguments opposés.

b)sous la forme algébrique $\underline{X} = a + jb$ où a et b réels sont repectivement la partie réelle et partie imaginaire de $\underline{X}$. Notation adaptée à l'addition et la soustraction.

$$X = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\underline{X}.\underline{X}^*} \qquad tan(\varphi) = \frac{b}{a} \qquad a = Re(\underline{X}) = X \cdot cos(\varphi) \qquad b = Im(\underline{X}) = X \cdot sin(\varphi)$$

Rem : la fonction Arctan ne peut être utilisée directement que dans les quadrants I et IV. Vérifiez avec $\underline{X}=-1+j$: $arg(\underline{X})=3\pi/4$ alors que $arctan(b/a)=-\pi/4$.

Rem : je répète, les nombres complexes à partie réelle négative sont DANGEREUX.

Rem : dans les calculs, le dénominateur reste complexe. On ne l'utilisera que dans le but explicite de calculer un argument (une phase en physique).

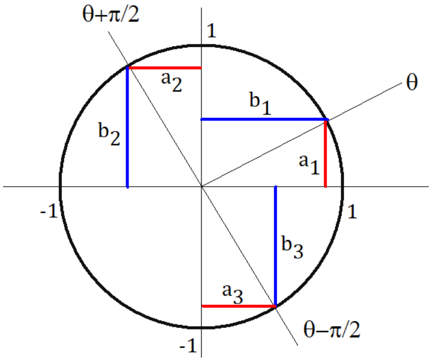
Rem : un argument n'apparaît jamais dans les calculs. Si on veut l'argument de $\underline{H} = \frac{1}{1-x^2+2jx}$:

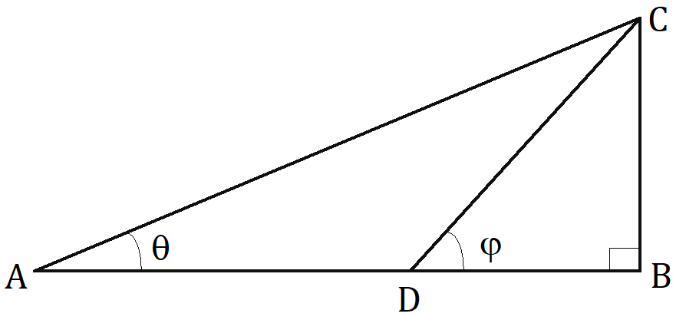
$$\varphi = arg(\underline{H}) = arg\left(\frac{1}{1-x^2+2jx}\right) = -arg(1 - x^2 + 2jx) = -arg\,(a + jb)$$

Si $x^2 < 1$ *alors* $\varphi = -arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

Si $x^2 > 1$ *alors* $\varphi = -arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi = arctan\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) \pm \pi$

M04.Trigonométrie élémentaire.





<u>Cercle trigonométrique.</u> Savoir déphaser de $\pi/2$ un angle.
Les 3 segments a_i ont la même longueur. Les 3 segments b_i ont la même longueur. En tenant compte des signes, on a :

$$cos(\theta) = sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \qquad sin(\theta) = -cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

<u>Valeurs usuelles :</u> $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

<u>Pythagore à maitriser absolument.</u> Dans le triangle rectangle ABC :

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \qquad cos(\theta) = \frac{AB}{AC} = \frac{adjacent}{hypoth\acute{e}nuse} \qquad sin(\theta) = \frac{BC}{AC} = \frac{oppos\acute{e}}{hypoth\acute{e}nuse}$$

<u>Al Kachi en option.</u> $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2 + 2 \cdot AD \cdot DC \cdot cos(\varphi)$

<u>Liaison avec les exponentielles complexes :</u>

$$e^{j\theta} = cos(\theta) + jsin(\theta) \qquad cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = Re\left(e^{j\theta}\right) \qquad sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = Im\left(e^{j\theta}\right)$$

cos est une fonction paire de période 2π ; sin est une fonction impaire de période 2π.

<u>A connaître absolument pour obtenir toute la suite :</u>

$$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$$

$$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b) \qquad sin(a+b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)$$

Ce qui permet de sortir notamment :

$$cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sin^2(\theta) = 2cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2sin^2(\theta) \qquad sin(2\theta) = 2cos(\theta)sin(\theta)$$

A partir de maintenant, on peut sortir :

$$cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b) \qquad sin(a-b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a)$$

Puis :

$$2cos(a)cos(b) = cos(a+b) + cos(a-b) \qquad 2sin(a)sin(b) = cos(a-b) - cos(a+b)$$

$$2sin(a)cos(b) = sin(a+b) + sin(a-b)$$

Ce qui permet de linéariser les produits de fonctions sinusoïdales.
Si on veut faire l'inverse, on définit :

$$\{p = a+b \ \ et\ q = a-b\}\ id\ est\ \left\{a = \frac{p+q}{2}\ \ et\ b = \frac{p-q}{2}\right\}$$

Et vous réécrivez les relations dans l'autre sens. Je donne la première :

$$cos(p) + cos(q) = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

M05.Dérivation et intégration,DL.

Notion de différentielle et liaison avec l'intégration.

$\boldsymbol{df = f'(x) \cdot dx}$ *relie la variation élémentaire de f à la variation élementaire de x et n'est vraie qu'à la limite de dx tendant vers 0.*

D'un point de vue physique : si Δf est la variation de f associée à une variation Δx de x alors

$$dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \qquad et \qquad df = \lim_{\Delta f \to 0} \Delta f \qquad vérifient \quad \boldsymbol{df = f'(x) \cdot dx}$$

Pour continuer le calcul, il faut intégrer entre l'état 1 (x_1,f(x_1)) et l'état 2 (x_2,f(x_2)) et on obtient évidemment :

$$\int_{f(x_1)}^{f(x_2)} \boldsymbol{df = f(x_2) - f(x_1)} = \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{f'(x) \cdot dx}$$

Notation de l'intégration en physique.

Soit F(x) une fonction dont la dérivée par rapport à x est f '(x).
2 façons de l'écrire selon qu'on met les bornes ou non :

$$\int f(x)dx \; = F(x) + \boldsymbol{Cte} \qquad ou \qquad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Choisir et ne pas mélanger. La première est généralement plus pratique.

Notation de la dérivée en physique pour une fonction d'une seule variable.

Pour un même problème, les variables d'étude peuvent varier selon la question. Par exemple, pour le mouvement d'une particule dans le plan Oxy

a)si on s'intéressse à la loi horaire, la variable est le temps et les fonctions x(t) et y(t).
b)si on s'intéresse à la trajectoire, on étudiera y=y(x) ou x=x(y)

Il faut donc toujours rappeler la variable de dérivation (sauf pour le temps)

Si f *est une fonction de x, qu'on écrit en physique* $f = f(x)$ *{rem: pas vrai en maths}, la dérivée qui est notée* $f'(x)$ *en maths sera notée en physique* $\left(\frac{df}{dx}\right)$ *qui pourra être considéré comme une division et qui permet de façon simple :*

a)D'exprimer la différentielle : $\boldsymbol{df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx}$

b)d'avoir la dérivée de la fonction inverse $x = x(f)$ *:* $\boldsymbol{x'(f) = \left(\frac{dx}{df}\right) = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)}}$

c)d'exprimer les dérivées composées. Si $x = x(t)$ *alors :*

$$\boldsymbol{\left(\frac{df}{dt}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

La dérivée d'ordre n sera notée : $\frac{d^n f}{dx^n}$

***Important :** l'utilisation du point, par exemple* $\ddot{x}$*, désignera **toujours** une dérivation temporelle et ne s'utilise jamais avec les lettres i et j qui ont déjà un point.*

Dérivées de f^n

$$\boldsymbol{\frac{d(f^n)}{dt} = n\left(\frac{df}{dt}\right) f^{n-1}}$$

__Tableaux de dérivées et de primitives__. *Les constantes d'intégration ont été omises.*

Tableaux des dérivées et primitives et quelques formules en prime

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arccos(x)$	$]-1;1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Opération	Dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$

Fonction	Intervalle d'intégration	Primitive
$(x-a)^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}$
$\frac{1}{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$]-\infty; a[$ OU $]a; +\infty[$	$\ln(\lvert x-a \rvert)$
$\frac{1}{(x-a)^n}, a \in \mathbb{R}, n \geq 2$	$]-\infty; a[$ OU $]a; +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
$\cos(ax), a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$
$\sin(ax), a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$
$\tan(x)$	$]k\pi-\frac{\pi}{2}; k\pi+\frac{\pi}{2}[, k \in \mathbb{Z}$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$x\ln(x)-x$
$e^{ax}, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$(x-a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$]a; +\infty[$	$\frac{1}{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1}$
$a^x, a > 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
$\sqrt{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$]a; +\infty[$	$\frac{2}{3}(x-a)^{3/2}$
$\frac{1}{\sqrt{x-a}}, a \in \mathbb{R}$	$]a; +\infty[$	$2\sqrt{x-a}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$	$\arcsin(x)$

<u>Développements limités.</u>

Pour une fonction f(x) au voisinage de $x=x_0$, le développement limité de $f(x)=f(x_0+h)$ à l'ordre n, s'il a un sens, est :

$$f(x_o+h)=f(x_o)+\frac{h}{1!}f'(x_o)+\frac{h^2}{2!}f''(x_o)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_o)+O(h^n)$$

En physique, on s'arrête généralement à l'ordre 1, rarement à l'ordre 2.

Dans les formulaires, ils sont données pour $x_0=0$, liste non exhaustive mais à connaître :

$$e^x=1+x+O(x)$$

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O(x^2)$$

$$cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)$$

$$sin(x)=x+\frac{x^3}{3}+O(x^5)$$

$$tan(x)=x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+O(x^2) \qquad TRES\ IMPORTANT$$

M06.Equation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants.

A la différence du cours de SI, si les propriétés des solutions sont à connaître, aucune forme précise d'équa diff n'est imposée . On vous demandera de retrouver les solutions, pas de les citer. Le passage de l'équa diff au polynôme doit être absolument maîtrisé pour la solution générale et il faut être capable de repasser des solutions du polynôme aux solutions de l'équa diff.

A)Cas général.

L'équation EQ vérifiée par x(t) peut s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k x^{(k)}(t) = e(t) \qquad EQ$$

Le second membre représente l'excitation e(t), le premier membre est associé à la réponse x(t). Le régime libre physique (sans excitation) correspond mathématiquement à l'équation homogène EQH dite aussi sans second membre.

Propriétés à connaître absolument :

Prop1: *l'ensemble des solutions de EQ est composée de la somme de l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée EQH (e(t)=0, régime libre d'un point de vue physique) et d'UNE solution particulière de EQ.*

Prop2 : *l'ensemble des solutions de EQH est un espace vectoriel de dimension n. Il suffit donc de trouver n solutions indépendantes pour obtenir une base des solutions de EQH.*

Si on cherche des solutions en exp(rt), l'EQH se transforme en polynôme P(r) de degré n qui , dans le corps des complexes, a n solutions distinctes ou non. En physique, sauf situation exceptionnelle, on a n solutions distinctes r_k réelles ou complexes , k variant de 1 à n. L'ensemble des solutions de EQH s'écrit donc :

$$x_H(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \underline{A}_k . exp(r_k t)$$

où les constantes $\underline{A}_k$ (dites aussi constantes d'intégration) sont a priori complexes.

Prop3 : notion de système stable : *en physique, un système est dit stable si son mouvement est borné dans le temps. Cela implique que les solutions du polynome doivent être à partie réelle négative.*

Prop4 : notion de régime permanent : *pour un système stable, au bout d'un certain temps à définir, seule subsiste la solution particulière qui prend le nom de régime permanent.*

Exemple d'application purement numérique, mais dont les résultats généraux sont à maîtriser :

$$\dddot{x}(t) + 2\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 2x(t) = -2$$

ou x est une grandeur physique sans dimension et $t = \frac{temps}{\tau}$ où τ est une durée de référence. Donc t n'a pas d'unité non plus.

a)Une solution particulière est $x_P(t) = -1$

b)Pour la solution générale sans second membre, on intuite $x(t) = A.exp(rt)$ dans EQH avec A non nul. EQH devient alors un polynome en r de degré 3 :

$$r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0$$

Il y a une solution évidente r=1, ce qui permet de factoriser et de trouver les deux autres racines :

$$(r-1)(r^2+3r-2) = (r-1)(r^2+3r-2) = (r-1)(r+1)(r+2) = 0$$

Nous avons trois solutions pour r, donc ous avons trouvé trois solutions différentes de EQH, espace vectoriel de dimension 3. Les trois solutions forment un système libre qui est donc aussi une base de EQH. Toute solution de EQH est une combinaison linéaire des trois solutions trouvées.

c)En comptant la solution particulière, la solution générale de EQ s'écrit :

$$x(t) = -1 + A.exp(t) + B.exp(-t) + C.exp(-2t)$$

Où A,B,C sont les constantes d'intégration. Pour les obtenir, il nous faut des informations supplémentaires, généralement sur l'état initial.

d)Le système est instable à cause de la première exponentielle.

M07.Ordre 1 à coefficients constants.

1)Sans second membre.

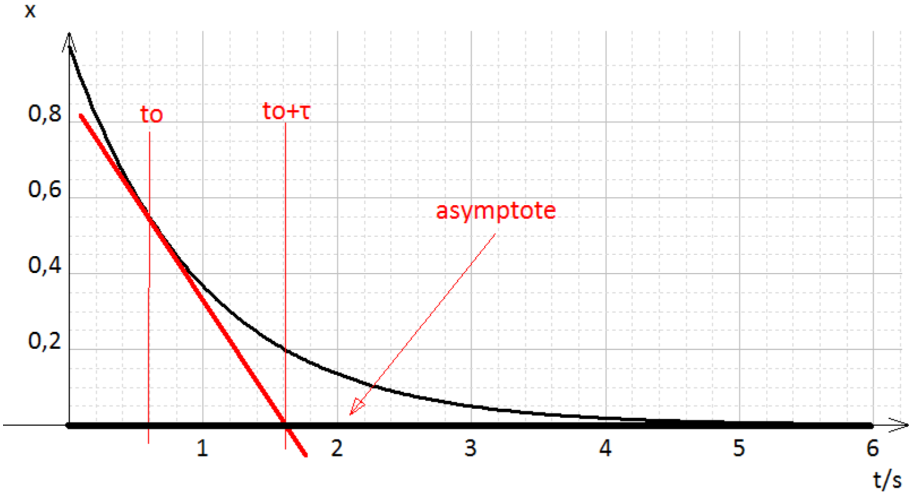
La forme générale d'une EQH d'ordre 1 peut être :

$$\tau\dot{s} + s = 0$$

On a un système stable pour τ>0.

L'écriture de la solution est $s_H(t) = A.exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ *où A est une constante d'intégration qu'on trouvera avec les conditions initiales.*

Propriété intéressante : en un point quelconque, la droite tangente rencontre l'asymptote au bout du temps τ :



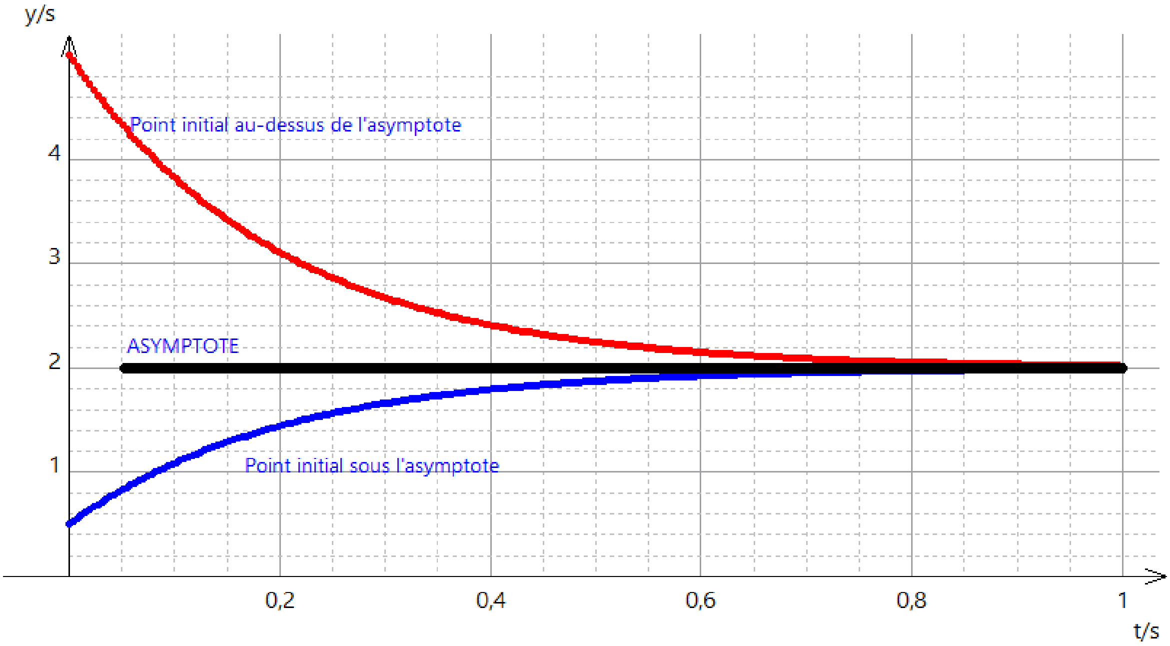
2)Avec second membre constant e(t)=E.

Charge de condensateur sous tension constante par exemple.

$$\tau\dot{s} + s = E$$

Il faut ajouter la solution permanente $s_P(t) = E$.

La solution est croissante si s(0)<E (courbe bleue), décroissante sinon (courbe rouge). Les aspects graphiques sont :



M08.EQH ordre 2 sans terme d'ordre 1.

A)*Soit s(t) vérifiant* $\ddot{s} - \omega_o^2 s = 0$ *avec* $\omega_o > 0$.

On peut prendre la fonction nulle comme solution particulière.
Pour EQH, on cherche s sous la forme A.exp(rt), A non nul,
ce qui donne les deux solutions réelles $r_1 = \omega_o$ *et* $r_2 = -\omega_o$

Une solution quelconque s'écrit donc :

$$s(t) = A.e^{+\omega_o t} + Be^{-\omega_o t}$$

On obtient toujours un ***système instable****.*

B) *Soit s(t) vérifiant* $\ddot{s} + \omega_o^2 s = 0$ *avec* $\omega_o > 0$. *OSCILLATEUR HARMONIQUE*

On peut prendre la fonction nulle comme solution particulière.
Pour EQH, on cherche s sous la forme A.exp(rt), A non nul,
ce qui donne les deux solutions purement imaginaires $r_1 = j\omega_o$ *et* $r_2 = -j\omega_o$

Une solution quelconque dans $\mathbb{C}$ *s'écrit donc :*

$$s(t) = \underline{A}.e^{+j\omega_o t} + \underline{B}e^{-j\omega_o t}$$

Si s(t) est un signal réel, la résolution avec CI réelles conduira à $\underline{A}$ *et* $\underline{B}$ *complexes conjugués. Les solutions s(t) réelles sont des sinusoïdes de pulsation* ω_o*. Du fait de la trigonométrie, on peut proposer plusieurs écritures pour s(t) :*

$$s(t) = \lambda.cos(\omega_o t) + \mu.sin(\omega_o t)$$
$$s(t) = S.cos(\omega_o t + \varphi) \quad avec \quad S \geq 0$$
$$s(t) = S.sin(\omega_o t + \psi) \quad avec \quad S \geq 0$$

On préfère généralement la première écriture qui ne donne qu'une seule solution pour le couple (λ, μ) *alors qu'on a toujours des problèmes pour exprimer les angles. On pourra ensuite calculer l'amplitude S de s(t) par :* $S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$.

M09. EQH ordre 2 avec terme d'ordre 1.

La forme générale est : $\ddot{s} + b\dot{s} + cs = 0$
Où b et c sont réels strictement non nuls. Un des deux nuls correspond à un cas déjà vu ci-dessus.

La résolution ne présente d'intérêt que dans le cas des systèmes stables : le polynome associé doit posséder des racines à valeur réelle négative.
Vous POUVEZ démontrer (quand même un peu de boulot) ou DEVEZ connaître :

SYSTEME STABLE correspond à b et c POSITIFS

Une *forme d'écriture de l'EQH stable d'ordre 2 est la suivante, en incluant l'oscillateur harmonique :*

$$\ddot{s} + 2\lambda\omega_o\dot{s} + \omega_o^2 s = 0 \qquad avec \qquad \lambda \geq 0 \; et \; \omega_o > 0.$$

Si la variable de dérivation désigne le temps , alors ω_o *est une pulsation en* s^{-1} *et* λ *n'a pas d'unité.*
Physiquement, λ *représente des pertes d'énergie par frottement. Plus il est grand, plus les frottements sont importants.*

Reprenons une écriture symbolique d'une EQH d'ordre 2 d'un système stable :

$$\ddot{s} + 2\lambda\omega_o\dot{s} + \omega_o^2 s \ = \ 0 \qquad avec\ \lambda \geq 0\ et\ \omega_o > 0.$$

Ce n'est pas la seule, donc il faut savoir s'adapter.

<u>Recherche d'une base des solutions.</u>

Si on cherche des solutions en exp(rt), l'EQH se transforme en polynôme P(r) de degré 2 :

$$r^2 + 2\lambda\omega_o r + \omega_o^2 \ = \ 0 \qquad \Delta = 4\omega_o^2(\lambda^2 - 1)$$

qui a donc deux solutions différentes r_+ et r_- dans C (sauf dans le cas λ=1 où il faudra trouver une autre solution). On a donc une base des solutions et l'ensemble des solutions s'écrit alors : $s(t) = A.exp(r_+t) + B.exp(r_-t)$ *ou A et B sont des constantes a priori complexes.*

Regardons de plus près les différents cas :

a)λ>1 . Les deux solutions sont réelles : régime apériodique. PAS D'OSCILLATIONS.

$$r_\pm = -\lambda\omega_o \ \pm \omega_o\sqrt{\lambda^2 - 1} \qquad s(t) = A.exp(r_+t) + B.exp(r_-t)$$

b)λ<1. Les deux solutions sont complexes conjuguées. Régime pseudo-périodique. OSCILLATIONS SINUSOIDALES D'AMPLITUDE DECROISSANTE. Les calculs donnent :

$$r_\pm = -\lambda\omega_o \ \pm j\omega_o\sqrt{1 - \lambda^2} = -\lambda\omega_o \ \pm j\omega$$

Les solutions dans C s'écrivent : $s(t) = \{\underline{A}.e^{+j\omega t} + \underline{B}.e^{-j\omega t}\}e^{-\lambda\omega_o t}$

Il faut maintenant extraire les solutions réelles id est celles telles que $s=s^*$ ce qui conduit à $\underline{A}$ et $\underline{B}$ complexes conjuguées. En écrivant $\underline{A} = Ae^{j\varphi}$, on obtient une écriture possible de s :

$$s(t) = \{Acos(\omega t + \varphi)\}e^{-\lambda\omega_o t}$$

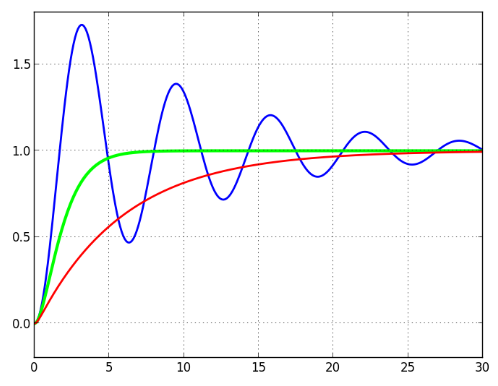
Sinusoïde de pulsation ω (partie imaginaire de la solution) dont l'amplitude décroît exponentiellement avec le temps (partie réelle de la solution).

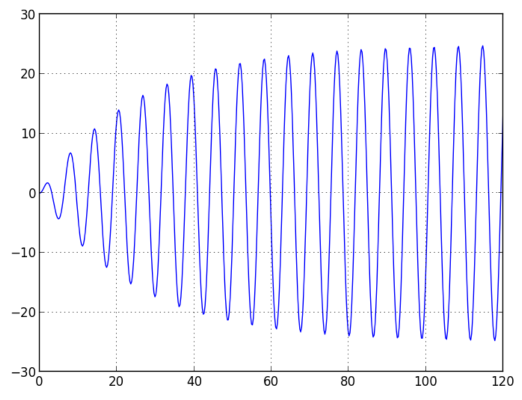
c)λ=1. Régime critique, SANS OSCILLATIONS. Solution double $r=-\omega_0$. Il faut trouver une seconde solution à EQH, par exemple, $te^{-\omega_o t}$. Une solution quelconque de l'EQH s'écrit :

$$s(t) = (At + B)e^{-\omega_o t}.$$

<u>Exemples graphiques avec second membre :</u>

A gauche, établissement d'un régime permanent continu dans les trois cas principaux.
A droite, établissement d'un régime permanent sinusoïdal dans le cas λ<1.





<u>A retenir :</u>

Au bout d'un certain temps à définir, il ne reste que la solution particulière qui est le régime permanent (continu à gauche, sinusoïdal à droite)

Le régime critique (courbe verte) est considéré comme le régime transitoire le plus court.

La résolution complète est longue et le risque d'erreur est élevé sur l'obtention des constantes d'intégration. Cette résolution est généralement non nécessaire.

M10)De la sinusoïde à la notation complexe.

POUR UN SYSTEME LINEAIRE, si l'excitation e(t) est sinusoïdale de pulsation ω, alors le régime permanent pour s(t) est aussi une sinusoïde de même pulsation ω. MAIS la gestion des fonctions sinusoïdales réelles est LOURDE. On utilisera donc la notation complexe.

Cette propriété permet de reconnaître les systèmes non linéaires.

ATTENTION : le régime permanent est en fait la solution particulière, on attend suffisamment longtemps pour que le régime transitoire disparaisse.

A)Ecriture d'un fonction sinusoïdale : ***$x(t)=X.\cos(\omega t+\varphi)$***

X : considéré positif, AMPLITUDE.

ω : considéré positif, PULSATION en s^{-1}.

φ : à définir sur un intervalle de largeur 2π, phase à l'origine des temps.

On définit aussi $f=\omega/2\pi$ FREQUENCE en Hz et $T=1/f$ PERIODE.

Notion d'avance de phase : $x_1(t)=X_1.\cos(\omega t+\varphi_1)$ $\quad$ $x_2(t)=X_2.\cos(\omega t+\varphi_2)$

L'avance de phase ou phase de x_2 sur x_1 est $(\varphi_2-\varphi_1)$.

Propriétés à connaître :

a)La somme de deux sinusoïdes de même pulsation ω est aussi une sinusoïde de pulsation ω.

b) $x(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ est une sinusoïde de pulsation ω et d'amplitude $\sqrt{A^2+B^2}$.

B)La notation complexe : ***$\underline{x}(t)=X.\exp[j(\omega t+\varphi)]=\underline{X}.\exp[j\omega t]$***

$\underline{x}(t)$: fonction complexe associée à x(t)

$\underline{X}=X.\exp[j\varphi]$ amplitude complexe.

Prop1 : sous réverse des contraintes définies en A, il y a bijection entre x(t) et $\underline{x}(t)$.

Prop2 : dans les mêmes conditions, si ω est fixée, il y a bijection entre x(t) et $\underline{X}$:

$$x(t)=Re(\underline{x}(t))=\text{norme}(\underline{X}).\cos(\omega t+Arg(\underline{X}))$$

Connaître le nombre complexe $\underline{X}$, la fonction $\underline{x}(t)$, la fonction x(t) sont équivalents.

C)Utilisation pratique de la notation complexe.

a)Toute relation additive entre fonctions sinusoïdales réelles de même pulsation ω est vraie avec les fonctions complexes associées et les amplitudes complexes associées.

b)Dériver temporellement en réel revient à multiplier par $j\omega$ en notation complexe.

c) $\cos(\omega t+\varphi)$ en réel $\leftrightarrow$ $e^{j(\omega t+\varphi)}$ en complexe

Application 1 : je veux calculer $f(t)=\cos(\omega t)+2\sin(\omega t+\pi/4)$

En réel, je dois bien connaître ma trigo et cela va être long. Je réécris f(t) avec des cos :

$f(t)=\cos(\omega t)+3\sin(\omega t+\pi/4)=f(t)=\cos(\omega t)+2\cos(\omega t+\pi/4-\pi/2)=\cos(\omega t)+2\cos(\omega t-\pi/4)$

que je peux transformer : $f(t)=Re\left(e^{j\omega t}+2e^{-j\pi/4}e^{j\omega t}\right)=Re\left(\underline{F}e^{j\omega t}\right)$

L'amplitude complexe de f est

$\underline{F}=1+2e^{-j\pi/4}=1+\sqrt{2}(1-j)=1+\sqrt{2}-j\sqrt{2}=Fe^{j\varphi}$

Avec $F=5+2\sqrt{2}\approx 7{,}83$ *et* $\varphi=-\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)\approx 0{,}53$

On peut maintenant écrire : $f(t)=F.\cos(\omega t+\varphi)$

Rem : les expressions littérales de F et φ peuvent apparaître dans l'expression de f(t), mais absolument pas leurs valeurs numériques approchées. Tout au plus, peut-on écrire :

$$f(t)=F.\cos(\omega t+\varphi)\quad avec\quad F\approx 7{,}83\quad et\ \varphi\approx 0{,}53$$

<u>Application 2 :</u> je veux écrire la solution permanente de l'EQ :

$$\ddot{x} + 2\lambda\omega_o\dot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 E.\cos(\omega t) \qquad EQ$$

où les constantes définies sont toutes réelles positives.

Je sais déjà que la réponse permanente x(t) est une sinusoïde de pulsation ω, mais je n'ai pas son expression. Si on reste en réel, on peut prendre une forme symbolique x(t)=Acos(ωt)+Bsin(ωt) , envoyer cette formule dans EQ, obtenir le système de Cramer vérifié par (A,B) et le résoudre.
Si vous avez beaucoup de temps à perdre, vous pouvez essayer (ça marche).

Mais si vous voulez aller assez vite :
On commence par passer en complexe (a et c) :

$$\ddot{\underline{x}} + 2\lambda\omega_o\dot{\underline{x}} + \omega_o^2\underline{x} = \omega_o^2 E.exp(j\omega t) \qquad EQ\ complexe$$

Puis (b) : $\dot{\underline{x}} = j\omega\underline{x} = j\omega\underline{X}exp(j\omega t)$ *et* $\ddot{\underline{x}} = j\omega\dot{\underline{x}} = -\omega^2\underline{x} = -\omega^2\underline{X}.exp(j\omega t)$

On reporte dans EQ complexe, on simplifie par $exp(j\omega t)$ qui n'est jamais nul et on sort :

$$\underline{X} = \frac{\omega_o^2 E}{\omega_o^2 - \omega^2 + 2j\lambda\omega_o\omega}$$

Si on veut repasser en réel, ce qu'on ne fera pratiquement jamais :

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi) \quad avec\ X = \|\underline{X}\| = \frac{\omega_o^2 E}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega_o\omega)^2}} \quad et\ \varphi = arg(\underline{X})$$

Rem : je n'ai pas exprimé φ, car il y a un petit pb (déjà vu avant d'ailleurs) . Lequel ?

<u>Application 3. Obtention de l'équation différentielle à partir du RSP(ω).</u>
Inverse de l'application 3. On part de la définition de <u>X</u> ci-dessus.
<u>X</u> représente x(t) ; jω<u>X</u> représente $\dot{x}(t)$ et ainsi de suite...
E représente e(t)
On passe le dénominateur au numérateur :

$$(\omega_o^2 - \omega^2 + 2j\lambda\omega_o\omega)\underline{X} = \omega_o^2 E$$

$$\omega_o^2\underline{X} + (j\omega)^2\underline{X} + 2\lambda\omega_o(j\omega\underline{X}) = \omega_o^2 E$$

On repasse en réel :

$$\omega_o^2 x(t) + \ddot{x} + 2\lambda\omega_o\dot{x}(t) = \omega_o^2 e(t)$$

et on réarrange pour la présentation :

$$\ddot{x} + 2\lambda\omega_o\dot{x}(t) + \omega_o^2 x(t) = \omega_o^2 e(t)$$

et on vérifie l'homogénéité. OK.

Remarque : si il y avait eu jω au dénominateur (ce qui revient à une intégration temporelle), on aurait tout multiplié par jω.