M03. Les complexes.

03.A)Description rapide de nombres complexes.

Avec utilisation éventuelle du complexe inverse. A part j, toutes les lettres désignent un réel positif. Soit la suite de nombres complexes :

1+j	*-1+j*	*1-j*
1/(1+j)	*(1-j)/(1+j)*	*1+jωτ*
R+jLω	*R+1/jCω*	*1/(R+jLω)*
(1-jωτ)/(1+jωτ)		

Déterminer : le quadrant occupé par le nombre complexe , l'argument, la norme.

03.B)Etudier rapidement les fonctions (norme et argument) pour $x \geq 0$:

$$\underline{H_1} = \frac{1}{1+jx} \quad ; \quad \underline{H_2} = \frac{1}{1-x^2+2jx} \quad ; \quad \underline{H_3} = \frac{1}{1+j\left(x-\frac{1}{x}\right)}$$

M06. Equation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants.

On rappelle que l'ensemble des solutions d'une equation linéaire de dégré n, à coefficients constants, à second membre nul, est un espace vectoriel de dimension n.

06A)*Soit s(t) une fonction vérifiant $\ddot{s} - \omega_o^2 s = 0$ avec $\omega_o > 0$.*

1)On cherche une solution sous la forme s(t)=A.exp(rt) où A et r sont des constantes. Si A est non nul, quelles sont les solutions pour r ?

2)Montrer maintenant que l'ensemble des solutions réelles se met sous la forme :

$$s(t) = A.exp(-\omega_o t) + B.exp(+\omega_o t) \ \text{ avec } A \text{ et } B \text{ réels}$$

3)Un système stable est tel que s(t) reste bormé dans le temps. Est-ce le cas ici ?

06B)*Soit s(t) vérifiant $\ddot{s} + \omega_o^2 s = 0$ avec $\omega_o > 0$.*

1)On cherche une solution sous la forme s(t)=A.exp(rt) où A et r sont des constantes. Si A est non nul, quelles sont les solutions pour r ?

2)Montrer maintenant que l'ensemble des solutions complexes se met sous la forme :

$$s(t) = A.exp(-j\omega_o t) + B.exp(+j\omega_o t) \ \text{ avec } A \text{ et } B \text{ complexes}$$

3)On s'intéresse aux solutions purement réelles. Montrer qu'on obtient alors :

$$s(t) = \lambda.cos(\omega_o t) + \mu.sin(\omega_o t) \ \text{ avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels}$$

Décrire complètement cette fonction, donner sa représentation graphique en fonction du temps. En physique, comment appelle-t-on un système obéissant à une telle équation ?

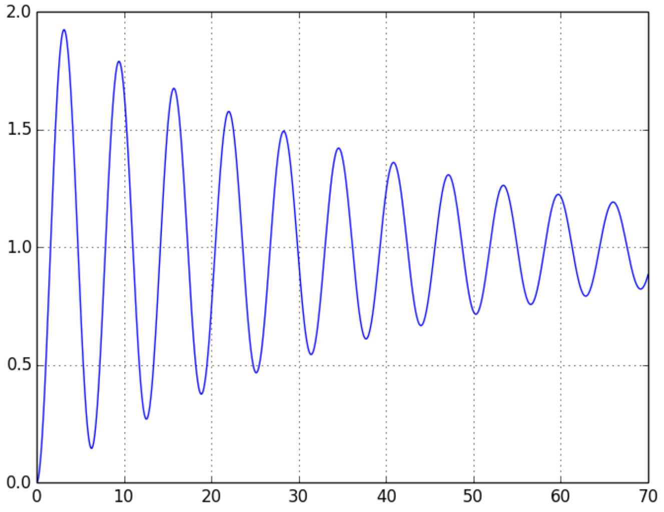
4)Un système stable est tel que s(t) reste bormé dans le temps. Est-ce le cas ici ?

06C)*Soit s(t) vérifiant $\ddot{s} + b\dot{s} + cs = 0$ où b et c sont deux constantes réelles non nulles. Montrer que le système n'est stable que si b et c sont positifs.* ***A défaut de savoir le démontrer, ce résultat est à connaître.***

06D) *Soit x(t) solution de $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où λ et ω_0 sont des constantes réelles positives non nulles tel que $\lambda \ll \omega_o$. Les conditions initiales sont : $x(0) = a > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.*

Calculer la solution x(t) et proposer une forme approchée.

06E)*Soit x(t) solution de* $\ddot{x} + 2\lambda\omega_o\dot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 E$ *où* λ, ω_o *, E sont des constantes réelles positives non nulles avec 0<*λ*<1.*
Les CI sont : $x(0) = 0$ *et* $\dot{x}(0) = 0$*.*
L'abscisse est le temps t en s.



1)Quelle est la valeur de E ?
2)Proposer une écriture de la solution x(t) sans faire le calcul des constantes d'intégration.
Par analyse simple du graphe ci-dessus, proposer une valeur numérique, éventuellement imprécise, de λ *et de* ω_o*.*

06F)*Soit x(t) solution de* $\ddot{x} + 2\lambda\omega_o\dot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 E.\cos(\omega t)$ *où* λ, ω_o*, E, et* ω *sont des constantes réelles positives non nulles.*
On cherche une solution permanente de x(t) sous la forme :

$$x(t) = A.\cos(\omega t) + B.\sin(\omega t)$$

où A et B sont des constantes réelles. Montrer qu'il n'y a qu'un seul couple solution.
Calculer les valeurs de A et de B.

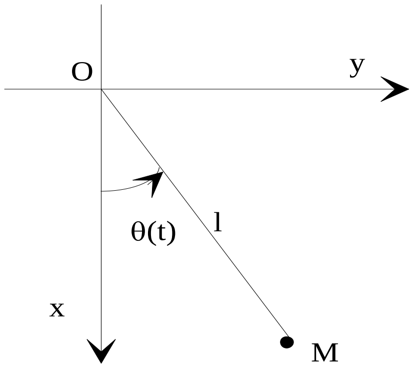
06G)*$\underline{F}$(x) est une fonction à valeurs complexes de la variable réelle x positive.*
Cette fonction est solution de : $\underline{F}''(x) = \frac{j}{\delta^2}\underline{F}(x)$ *où* δ *est un réel positif.*
Montrer qu'on peut écrire :

$$\underline{F}(x) = \underline{A}.\exp(-\underline{r}x) + \underline{B}.\exp(\underline{r}x) \qquad \text{avec} \qquad \underline{r} = \frac{1+j}{\delta\sqrt{2}}$$

où $\underline{A}$ *et* $\underline{B}$ *sont des constantes d'intégration complexes.*
Que doit-on imposer sur les constantes d'intégration si $\underline{F}(x)$ *doit rester finie sur l'intervalle* $[0\,;\,+\infty]$ *?*

06H)*On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'une tige rigide inextensible de longueur ℓ et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g\vec{e}_x$, $\vec{e}_x$ étant le vecteur unitaire de l'axe Ox et $g = 9{,}81\ SI$.*

On s'intéresse uniquement aux mouvement dans le plan Oxy et on note l'angle orienté $\theta = (Ox, OM) = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$ où $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire colinéaire de la direction OM.



On lâche la masse d'un angle θ_0 compris entre 0 et π sans vitesse initiale.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Sauf à la fin de l'exercice, on néglige la présence de frottements.

1)Dans le cadre théorique ainsi décrit, $\theta(t)$ obéit à l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \cdot \sin(\theta) = 0 \ \text{avec}\ \omega_o > 0 \text{, equation } (\alpha)$$

Quelle est l'unité de la constante ainsi définie ? Donner par analyse dimensionnelle son expression possible en fonction des grandeurs physiques du problème.

2)On cherche les positions d'équilibre du système, soit donc les solutions du type $\theta(t) = cte$. Quelles sont les valeurs θ_{eq} de θ_0 qui conduisent à une position d'équilibre ?

3)On s'intéresse maintenant au mouvement de M au voisinage d'une position d'équilibre. On pose donc : $\theta(t) = \theta_{eq} + \varepsilon(t)$ en supposant $|\varepsilon(t)| \ll 1$. Pour les différentes positions d'équilibre obtenues, obtenir l'équation différentielle obtenue par $\varepsilon(t)$. Décrire les solutions et les mouvements obtenus. Conclure.

On reprend maintenant le mouvement général avec θ_0 différent de θ_{eq}.

4)Justifier que l'équation (α) conduit à l'équation (β):

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_o^2 \cdot \cos(\theta) + constante$$

Vérifier maintenant que (β) est une forme intégrée de (α) à condition de multiplier cette dernière par une expression à fournir (le facteur intégrant).
Déterminer la valeur de la constante. Montrer que le mouvement de la masse M est oscillatoire autour de θ=0 et d'amplitude θ_0. On note $T=T(\theta_0)$ la période du mouvement.

5)Pour θ_0 suffisament faible, montrer que T tend vers une valeur T_o que l'on exprimera en fonction de ω_0.

6)Dans le cas contraire, montrer qu'on peut obtenir :

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\omega_o\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\theta_o} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_o)}}$$

7)L'intégrale ci-dessus n'a pas de solution formelle (sauf à la nommer). On l'obtient donc par intégration numérique. Décrire (dessin obligatoire) la méthode dite des trapèzes qui permet d'évaluer une intégrale (formule à citer). Expliquer maintenant pourquoi cette méthode ne va pas permettre d'évaluer l'intégrale de la question 6.

8)On opère le changement de variables suivant :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_o}{2}\right)\sin(y) \ \text{avec}\ \cos(\theta) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Vérifier la bijection et montrer qu'on obtient :

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\omega_o\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{2dy}{\sqrt{1 - sin^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right) sin^2(y)}}$$

La méthode des trapèzes marche-t-elle maintenant ?

9)On rappelle qu'au voisinage de 0, $(1+u)^\alpha \approx 1 + \alpha u$

On voudrait maintenant obtenir le développement limité à l'ordre 2 en θ_o *de T. Soit donc :*

$$T(\theta) \approx K_o(1 + K_1\theta_o + K_2\theta_o^2)$$

Déterminer les 3 constantes. Comme je suis gentil, je vous indique que deux sont quasiment évidentes et la dernière nettement plus chaude.

Lorsque l'on enregistre expérimentalement θ(t), on constate que l'amplitude de θ *diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par :*

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$$

où $\vec{v}$ *désigne la vitesse du point M et α, une constante positive.*

En se limitant aux petits angles, l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ *se met sous la forme :*

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_o^2\theta = 0 \ .$$

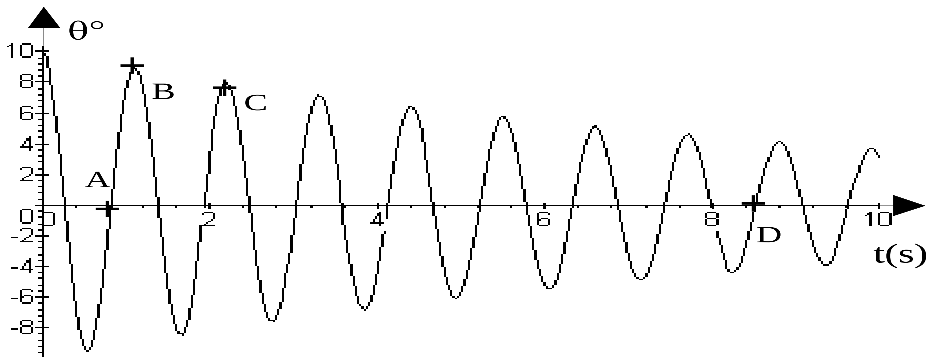
10)En justifiant, quelle est l'unité de la constante positive τ ?

11) A quelle condition sur le produit $\tau\omega_o$ *obtient-on un régime pseudo-périodique ? Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T. On appelle décrément logarithmique, δ la quantité* $Ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right)$ *où T est la pseudo-période et t le temps. Exprimer δ en fonction de T et τ.*

12) La figure ci dessous représente les variations de θ *avec le temps.*

On précise les coordonnées de 4 points particuliers:

Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
θ(°)	0	8,95	8,02	0



a) le décrément logarithmique δ; *b) la pseudo-période, T;*

c) la constante τ;

06I)*Piège de Penning. Multiples origines (ENS, CCP…)*

On étudie dans R(Oxyz) de base $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$*, référentiel galiléen* ***sans pesanteur****, le mouvement d'un électron M, de masse m=9,1.10*$^{-31}$*kg, de charge q=-e=-1,6 10*$^{-19}$*C, soumis à des champs électromagnétiques dans le cadre de la mécanique classique,*

1)Dans un premier temps, l'électron est soumis à l'action d'un champ électrique stationnaire non uniforme $\vec{E} = (-2bx \quad -2by \quad 4bz)$ *avec b=2.10*^{5} *SI.*

La position (x,y,z) de l'électron suit alors les lois suivantes :

$$\ddot{x} = \frac{\omega_o^2}{2} \cdot x \qquad \ddot{y} = \frac{\omega_o^2}{2} \cdot y \qquad \ddot{z} = -\omega_o^2 \cdot z$$

a)Quelle est l'unité de la grandeur positive ω_o *. Proposer une expression possible en fonction de e,b et m.*

b)Montrer que l'électron immobile en O est une solution mathématique possible du problème. Comment appelle-t-on une telle position ?

On suppose maintenant l'électron au voisinage de O. Monter qualitativement qu'il va s'éloigner indéfiniment de O. Comment peut-on alors qualifier la position O ?

2)Pour corriger le défaut précédent, on ajoute un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{e}_z$ *avec B=0,55T. Les équations de mouvement deviennent alors :*

$$\ddot{x} = \frac{\omega_o^2}{2} \cdot x - \omega_m \dot{y} \qquad \ddot{y} = \frac{\omega_o^2}{2} \cdot y + \omega_m \dot{x} \qquad \ddot{z} = -\omega_o^2 \cdot z$$

a)Quelle est l'unité de la constante positive ω_m*. Proposer une expression possible en fonction de e, B, m.*

b)Justifier que le mouvement selon l'axe Oz n'a pas été modifié par le champ magnétique ? Quelle est d'ailleurs la nature de ce mouvement ?

Pour la suite , on suppose $\omega_m \gg \omega_o$*.*

c)Pour résoudre le mouvement selon xOy, on pose p=x+jy. Quelle est l'équation vérifiée par p(t)? On cherche des solutions sous la forme p(t)=p_o *exp(j*ω*t). Montrer qu'on obtient deux solutions* ω_1 *et* ω_2*(*$\omega_1 < \omega_2$*), dont l'une voisine de* ω_m *qu'on exprimera en fonction de* ω_o *et de* ω_m*.*

d)On suppose qu'à l'instant t=0 on a M en (x_o*>0,0,*z_o*>0) et* $\vec{v}$ *(0,*v_o*>0,0) en supposant* $x_o\omega_1 \ll v_o \ll x_o\omega_2$*.*

Exprimer alors z(t) .

On cherche alors p sous la forme : $p(t)=A_1.\exp(j\omega_1 t)+ A_2.\exp(j\omega_2 t)$

Exprimer en les comparant A_1 *et* A_2 *puis x(t) et y(t).*

Montrer schématiquement la nature de la trajectoire de M .

e)Sachant qu'une charge subissant une accélération non nulle rayonne de l'énergie, que va-t-il se passer pour l'électron précédent ?

M10. De la sinusoïde à la notation complexe.

A la fonction réelle $x(t)=X.\cos(\omega t+\varphi)$, on associe la fonction complexe $\underline{x}(t)=X.\exp[j(\omega t+\varphi)]=\underline{X}\exp(j\omega t)$ et l'amplitude complexe $\underline{X} = X.\exp(j\varphi)$. Connaître une des trois grandeurs est équivalent à connaître les deux autres à pulsation donnée. Les lois de l'électronique peuvent s'écrire avec les trois grandeurs, sauf pour les grandeurs énergétiques.

10A._Soient deux fonctions sinusoïdales $u_1=\sin(\omega t)$ et $u_2=2\sin(\omega t+\varphi)$ avec φ compris entre 0 et $\pi/2$. On dira que u_2 est en avance de phase de φ sur u_1._

a)Tracer les formes graphiques des deux fonctions sur un même graphe. A quoi voit-on que u_2 est en avance de phase par rapport à u_1 ?

b)Si on écrit cos à la place de sin, les positions relatives des deux courbes changent-elles ?

10B._Montrer que $x(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ est une sinusoïde de pulsation ω et d'amplitude $\sqrt{A^2+B^2}$._
On peut utiliser : $\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$.
Que peut-on dire de la somme de deux sinusoides de même pulsation ?

10C._En utilisant la notation complexe , calculer l'amplitude de $\cos(\omega t)+3\cos(\omega t+\pi/4)$ puis celle de $\cos(\omega t)+2\sin(\omega t+\pi/4)$._

10D._On note $i_1(t)=I.\cos(\omega t)$, $i_2(t)=I.\cos(\omega t+2\pi/3)$, $i_3(t)=I.\cos(\omega t+4\pi/3)$. En passant par la notation complexe, calculer la somme de ces trois courants._
Application : le dernier étage mécanique d'une centrale électrique est un alternateur triphasé : le courant sortant de la phase k est $i_k(t)$. Les trois courants sont alors transportés sous très haute tension (400kV) par une ligne THT pour alimenter les zones de consommation. Intérêt ?

10E._Trois dipôles D_1,D_2, D_3 sont en série dans un circuit. On note $i(t)$ le courant parcourant les trois dipôles et $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$ les tensions respectives aux bornes de chaque dipôle en convention récepteur._
Un générateur alimente les trois dipôles sous la tension totale $e(t)= u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$.

On se place en régime permanent sinusoïdal de pulsation ω et on note $i(t)=I.\cos(\omega t)$ avec $I>0$. Les trois tensions complexes valent respectivement :

$\underline{U}_1=3$ V $\qquad$ $\underline{U}_2=4.\exp(j\pi/4)$ V $\qquad$ $\underline{U}_3=5j$ V

1)comment va-t-on écrire $\underline{I}$? Que pourrait être le dipôle D_1 ?

2)Exprimer $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$ de façon purement numérique en fonction de ω et de t. En déduire une expression de $e(t)$? Que peut-on en faire ?

3)A $e(t)$ on associe $\underline{E}$. Quelle est la relation entre les différentes tensions complexes. Par un dessin adéquat, représenter $\underline{E}$ et mesurer son amplitude et sa phase. Vérifier par le calcul.

4)Exprimer alors $e(t)$ de façon purement numérique en fonction de ω et de t. Quelle sont les avances de phase de $e(t)$ par rapport à $i(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$?

10F. _Soit la fonction $x(t)=X.\cos(\omega t+\varphi)$ à laquelle on associe $\underline{x}(t)=X.\exp[j(\omega t+\varphi)]=\underline{X}\exp(j\omega t)$. $\underline{X}$ est appelé l'amplitude complexe._

1)Montrer : $\underline{x}(t)= x(t) + j.x(t-\pi/(2\omega))$

2)Montrer que l'amplitude complexe associée à (dx/dt) est $j\omega\underline{X}$.

3)Soit $x(t)$ vérifiant EQ : $\ddot{x}+2\lambda\omega_o\dot{x}+\omega_o^2x=\omega_o^2E.\cos(\omega t)$. On cherche une solution permanente $x(t)=X.\cos(\omega t+\varphi)$ à laquelle on associe $\underline{x}(t)$ et $\underline{X}$.

Montrer que $\underline{x}(t)$ vérifie une équation différentielle très proche de EQ et qu'on peut sortir alors $\underline{x}(t)$ ou mieux encore $\underline{X}$. On peut aussi remarquer que le temps a encore disparu.

10G. *Si $x(t)=X.\cos(\omega t+\varphi)$ est la solution permanente sinusoïdale de $\tau\dot{x}+x=A.\cos(\omega t)$ où les constantes sont toutes positives, exprimer l'amplitude complexe $\underline{X}=X.\exp[j\varphi]$ associée à $x(t)$. Exprimer alors l'amplitude et la phase de $x(t)$.*
Si on remplace cos par sin dans l'équation différentielle, quelle est la nouvelle écriture de $x(t)$?

10H. *Si $x(t)=X.\cos(\omega t+\varphi)$ est la solution permanente sinusoïdale de*
$\ddot{x}+2\lambda\omega_o\dot{x}+\omega_o^2x=A.\cos(\omega t+\pi/2)$ *, où les constantes sont toutes positives.*

a)Calculer l'amplitude complexe associée $\underline{X}$.

b)Exprimer $\tan(\varphi)$ et montrer que sa connaissance est suffisante pour déterminer φ.

10I.Soit $x(t)=Re\left(\underline{x}(t)=\underline{X}exp(j\omega t)\right)$ *avec* $\underline{X}=\frac{x_o}{1+j\tau\omega}$ *et* x_o, τ *et* ω *réels positifs.*
Proposer une écriture de $x(t)$.

10J.Soit $x(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ *avec A et B réels.. Comment écrire : $\underline{x}(t)$ et son amplitude complexe $\underline{X}$ dont on donnera la norme et l'argument.*