03. Les complexes.

03.A)Description rapide de nombres complexes.

complexe	quadrant	Norme	argument	Remarque
1+j	*I*	$\sqrt{2}$	$+\pi/4$	
-1+j	*II*	$\sqrt{2}$	$+3\pi/4$	*La fonction Arctan ne marche pas*
1-j	*IV*	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$	
1/(1+j)	*IV*	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$	*Inverse du premier*
(1-j)/(1+j)		*1*	$-\pi/2$	*Rapport de 2 complexes conjugués*
$1+j\omega\tau$	*I*	$\sqrt{1+(\tau\omega)^2}$	$arctan(\tau\omega)$	
$R+jL\omega$	*I*	$\sqrt{R^2+(L\omega)^2}$	$arctan(L\omega/R)$	
$1/(R+jL\omega)$	*IV*	$\dfrac{1}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}$	$-arctan(L\omega/R)$	*L'inverse du précédent*
$R+1/jC\omega$	*IV*	$\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$	$-arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$	
$(1-j\omega\tau)/(1+j\omega\tau)$	*III ou IV*	*1*	$-2arctan(\tau\omega)$	*Rapport de 2 complexes conjugués*

03.B)Etudier rapidement les fonctions (norme et argument) :

$$\underline{H_1} = \frac{1}{1+jx} \quad ; \quad \underline{H_2} = \frac{1}{1-x^2+2jx} \quad ; \quad \underline{H_3} = \frac{1}{1+j\left(x-\frac{1}{x}\right)}$$

Pour les normes, a priori pas de pb, attention au signe :

$$\|\underline{H_1}\| = \frac{1}{\sqrt{1^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 = \|\underline{H_1}(0)\| \qquad \|\underline{H_2}\| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+(2x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^4+2x^2}} = \frac{1}{1+x^2} \leq 1 = \|\underline{H_2}(0)\|$$

$$\|\underline{H_3}\| = \frac{1}{\sqrt{1^2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \leq 1 = \|\underline{H_3}(1)\|$$

Les trois normes sont comprises entre 0 et 1. Le maximum est atteint. Vous devez reconnaître deux filtres passe-bas et un passe-bande.

Pour les arguments, la fonction Arctan est utilisable si la partie réelle est positive (cas le plus courant). Sinon, il faut décaler de $\pm\pi$.

$$arg(\underline{H_1}) = arg\left(\frac{1}{1+jx}\right) = arg(1) - arg(1+jx) = 0 - Arctan(x) = -Arctan(x)$$

Quand x varie de 0 à $+\infty$, l'argument varie de 0 à $-\frac{\pi}{2}$

Même méthode pour les deux autres :

$$arg(\underline{H_2}) = -arg(1-x^2+2jx)$$

Si x compris entre et 1 : $arg(\underline{H_2}) = -Arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

Si x est plus grand que 1: $arg(\underline{H_2}) = -Arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \pm \pi$

Quand x varie de 0 à 1, l'argument varie de 0 à $-\frac{\pi}{2}$

Quand x varie de de 1 à $+\infty$, l'argument varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\pi$.

$$arg(\underline{H_3}) = -arg\left(1+j\left(x-\frac{1}{x}\right)\right) = -Arctan\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

Quand x varie de 0 à $+\infty$, l'argument varie de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$ en passant par 0 pour x=1.

06. Equation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants.

On rappelle que l'ensemble des solutions d'une equation linéaire de dégré n, à coefficients constants, à second membre nul, est un espace vectoriel de dimension n.

06A)1)On reporte la fonction proposée dans l'équa diff et on obtient un polynôme de degré 2 en simplifiant par A non nul : $r^2 - \omega_o^2 = 0$. Les deux solutions sont $r_1 = -\omega_o$ et $r_2 = +\omega_o$.

2)L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. A la question 1, on a trouvé 2 solutions qui forme un système libre donc qui est une base des solutions. L'ensemble des solutions est donc l'ensembles des combinaisons linéaires réelles ou complexes des deux solutions trouvées selon qu'on travaille dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3)s(t) n'est borné dans le temps que si B est rigoureusement nul, ce qui ne sera jamais physiquement le cas. Donc le système est instable.

06B)OSCILLATEUR HARMONIQUE.

1) On reporte la fonction proposée dans l'équa diff et on obtient un polynôme de degré 2 en simplifiant par A non nul : $r^2 + \omega_o^2 = 0$. Les deux solutions sont $r_1 = -j\omega_o$ et $r_2 = +j\omega_o$.

2)L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. A la question 1, on a trouvé 2 solutions qui forme un système libre donc qui est une base des solutions. L'ensemble des solutions est donc l'ensembles des combinaisons linéaires des deux solutions trouvées.

Au passage, nous avons l'ensemble des solutions dans le corps des complexes.

3)Si s(t) est réelle, alors $s(t) = Re\left(s(t)\right)$

On écrit : $A = Re(A) + jIm(A)$; $B = Re(B) + jIm(B)$ $e^{j\theta} = cos(\theta) + jsin(\theta)$

On envoit tout cela dans la relation : $s(t) = Re\left(s(t)\right)$

Cela donne : $s(t) = \{Re(A) + Re(B)\}cos(\omega_o t) + \{-Im(A) + Im(B)\}sin(\omega_o t)$

On pose maintenant : $\lambda = \{Re(A) + Re(B)\}$ *et* $\mu = \{-Im(A) + Im(B)\}$

Et c'est fini. On peut encore utiliser la trigo pour écrire:

$s(t) = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}.cos(\omega_o t + \varphi)$, avec $cos(\varphi) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$ et $sin(\varphi) = \frac{-\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$

La solution est donc une sinusoïde de pulsation ω_o et de période $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$

4)Les fonction sin et cos sont bornées, donc le système est stable.

C)On doit trouver une base des solutions, on intuite une forme non nulle en en exp(rt), ce qui donne un polynome de degré 2 : $r^2 + br + c = 0$ dont on calcule le déterminant $\Delta = b^2 - 4c$.
Pour avoir un système stable, il faut que les éléments de la base convergent vers 0 à l'infini, donc que la partie réelle de r soit négative.

a)Premier cas : $\Delta > 0$. On a deux solutions réelles dont la somme vaut -b et le produit c. Avoir les deux solutions négatives est équivalent à b et c positifs.

b)Second cas : $\Delta = 0$. On a une solution double réelle r=-b. On doit avoir b positif, et on, obtient à nouveau c positif. Il nous faut une seconde solution pour obtenir la base : nous savons tous que t.exp(-bt) est aussi solution. Les deux solutions sont nulles pour t tendant vers l'infini. Il en sera de même pour leurs combinaisons linéaires.

c)Troisième cas : $\Delta = b^2 - 4c < 0$, ce qui implique forcément c positif. On a maintenant deux solutions complexes conjuguées : $r_\pm = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2}$. Les deux solutions doivent être à partie réelle négative, on a donc b>0.

06D) Le mieux serait de le faire proprement.

La solution de cette équa diff est la somme d'UNE solution particulière à trouver (ICI la fonction nulle, donc c'est réglé) et la solution générale (id est **toutes** les solutions) de l'équation homogène ou sans second membre. Ce dernier ensemble est un espace vectoriel de dimension 2, donc il suffit de trouver un système libre de deux solutions.

Comme je connais mon cours de maths et les prop de la fonction exp, je cherche des solutions sous la forme très particulière $x(t) = A.e^{rt}\ avec\ A\ non\ nul$. On envoie la forme dans l'équa diff, on simplifie par $A.e^{rt}$ qui ne peut pas s'annuler et l'équa diff devient un polynôme de degré 2 en r :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_o^2 = 0 \qquad \Delta = 4(\lambda^2 - \omega_o^2) < 0\ ici$$

On va donc être obligé de résoudre dans le corps des complexes.

Je pose $\omega = \sqrt{(\omega_o^2 - \lambda^2)}$ ce qui me permet d'écrire : $\Delta = -4\omega^2 = (\pm j2\omega)^2$

et les deux solutions du polynôme sont alors : $r_\pm = -\lambda \pm j\omega$

Les deux solutions trouvées sont donc : $x_+(t) = e^{-\lambda t}e^{+j\omega t}$ et $x_-(t) = e^{-\lambda t}e^{-j\omega t}$

Vérifiez par vous-mêmes que ces deux solutions définissent un système libre de l'ensemble des solutions, donc c'est une base de l'ensemble des solutions, l'ensemble des solution est l'ensemble des combinaisons linéaires (dans le corps des complexes) des deux solutions :

$$x(t) = \underline{A}x_+(t) + \underline{B}x_-(t) = \left\{\underline{A}e^{+j\omega t} + \underline{B}e^{-j\omega t}\right\}e^{-\lambda t}$$

A partir de maintenant, on peut extraire l'ensemble des solutions réelles. Ce n'est pas très compliqué : x(t) réelle est équivalent à x(t) égale à son complexe conjugué ce qui conduit à

$$pour\ tout\ t\ \left\{\underline{A}e^{+j\omega t} + \underline{B}e^{-j\omega t}\right\} = \left\{\underline{A}^*e^{-j\omega t} + \underline{B}^*e^{+j\omega t}\right\}\ \ soit\ \underline{B}^* = \underline{A}$$

On écrit maintenant $\underline{A}$ sous sa forme polaire $\underline{A} = Ae^{j\varphi}$ $avec\ A \geq 0\ et\ \varphi \in]-\pi; +\pi]$

et finalement :

$$x(t) = A.cos(\omega t + \varphi)e^{-\lambda t}$$

Travailler avec des angles n'est pas très intéressant donc on préférera svt :

$$x(t) = \{A'.cos(\omega t) + B'.sin(\omega t)\}e^{-\lambda t}$$

mais compliquer les calculs est un droit.

Reste à trouver les deux constantes d'intégration A' et B'.

x(0)=a entraîne A'=a.

On calcule maintenant :

$$\dot{x}(t) = -\lambda\{a.cos(\omega t) + B'.sin(\omega t)\}e^{-\lambda t} + \omega\{-a.sin(\omega t) + B'.cos(\omega t)\}e^{-\lambda t}$$

$$\dot{x}(0) = -\lambda\{a\} + \omega\{B'\} = 0\ \ qui\ donne\quad B' = \frac{\lambda}{\omega}a$$

la solution est donc :

$$x(t) = a\left\{cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega}.sin(\omega t)\right\}e^{-\lambda t}$$

Si on utilise maintenant $\lambda \ll \omega_o$, on obtient $\omega = \sqrt{(\omega_o^2 - \lambda^2)} \approx \omega_o$ et le terme en sinus très petit en norme devant celui en cos. On peut donc simplifier :

$$x(t) \approx a\{cos(\omega_o t)\}e^{-\lambda t}$$

06E) ***1)****On ne voit pas réellement l'asymptote, mais cela semble bien converger vers 1, qui est en fait la soltion permanente. On a donc E=1.*

2)*On est dans le cas pseudo-périodique soit* $0 < \lambda < 1$*. Vous devez savoir écrire les solutions réelles sous la forme :* $x(t) = E + \{A\cos(\omega t + \varphi)\}e^{-\lambda\omega_o t}$ *avec* $\omega = \omega_o\sqrt{1-\lambda^2}$

A et φ *sont les constantes d'intégration, difficiles à obtenir donc on va essayer de s'en passer.*

On n'a pas non plus le fichier des points de mesures, donc pas de regressi ou LatisPro.

On voit une bonne dizaine d'oscillations, dont le système est faiblement amorti et nous pouvons supposer $0 < \lambda \ll 1$*, ce qui donne :* $\omega = \omega_o\sqrt{1-\lambda^2} \approx \omega_o$*.*

On mesure alors 10 oscillations sur environ 63s, ce qui donne un epériode de 6,3s donc une pulsation $\omega_o \approx 1s^{-1}$*.*

Observons maintenant les minima de x(t) (le premier est à l'instant t=0), l'ensemble de ces points dessine en fait l'exponentielle (pas tout-à-fait vrai en fait). Si nous dessinons la pente à l'instant t=0, nous savons qu'elle rencontre l'asymptote au bout du temps : $\tau = \frac{1}{\lambda\omega_o}$*.*

On mesure ici $\tau = \frac{1}{\lambda\omega_o} \approx 40s$ *d'où* $\lambda \approx 0{,}025 \ll 1$ *OK avec l'hypothèse de départ.*

Remarque : si l'hypothèse de départ n'avait pas été bonne, le calcul est beaucoup plus compliqué : système non linéaire à deux inconnues. Il faut savoir être fainéant.

06F)remarque générale : *nous n'avons besoin que d'une seule solution particulière. Donc en trouver une est suffisant.*

Méthode n°1: on reste en notation réelle.

On intuite la forme proposée dans l'équation différentielle, on regroupe les cos et sin et on obtient :

$$\{(\omega_o^2-\omega^2)A + 2\lambda\omega_o\omega B\}.\cos(\omega t) + \{-2\lambda\omega_o\omega A + (\omega_o^2-\omega^2)B\}.\sin(\omega t) = \omega_o^2 E.\cos(\omega t) + 0.\sin(\omega t)$$

Ce qui équivalent à (un peu de boulot pour les matheux, on contourne l'obstacle) :

$$(\omega_o^2-\omega^2)A + 2\lambda\omega_o\omega B = \omega_o^2 E$$
$$-2\lambda\omega_o\omega A + (\omega_o^2-\omega^2)B = 0$$

Le déterminant est : $\Delta = (\omega_o^2-\omega^2)^2 + (2\lambda\omega_o\omega)^2 \neq 0$

Donc on a un système de Cramer, la solution est unique et calculable. On sort maintenant :

$$A = \frac{\omega_o^2(\omega_o^2-\omega^2)E}{\Delta} \quad et \quad B = \frac{2\lambda\omega\omega_o^3 E}{\Delta}$$

Ce n'est pas si compliqué que cela, mais beaucoup de calculs et gros risques d'erreurs , ne serait-ce qu'avec les signes. Il vaut mieux prendre la méthode n°2.

Méthode n°2: on passe en notation complexe : il suffit de remplacer cos par expj.

Soit $\underline{x}(t)$ *solution de* $\ddot{\underline{x}} + 2\lambda\omega_o\dot{\underline{x}} + \omega_o^2\underline{x} = \omega_o^2 E.e^{j\omega t}$

prop1 : si $\underline{x}(t)$ *est solution de l'équa diff complexe, alors Re(*$\underline{x}(t)$*) est solution de l'équation réelle.*

Je cherche maintenant une solution permanente sous la forme $\underline{x}(t) = \underline{X}_o.e^{j\omega t}$

On intuite dans l'équa diff, on simplifie par $e^{j\omega t}$ *qui n'est jamais nulle (NE DITES PAS POSITIVE) et on obtient directement :*

$$\underline{X}_o = \frac{\omega_o^2 E}{(\omega_o^2-\omega^2) + 2j\lambda\omega_o\omega} = \frac{\{(\omega_o^2-\omega^2) - 2j\lambda\omega_o\omega\}\omega_o^2 E}{(\omega_o^2-\omega^2)^2 + (2\lambda\omega_o\omega)^2} = \frac{\{(\omega_o^2-\omega^2) - 2j\lambda\omega_o\omega\}\omega_o^2 E}{\Delta}$$

Pour une fois, mais on le fera très rarement, on a multiplié par le complexe conjugué. On pourra aussi remarquer que le temps a disparu.

Et on a notre solution réelle en prenant la partie réelle de la solution complexe temporelle :

$$x(t) = Re\big(\underline{x}(t)\big) = \frac{\omega_o^2 E}{\Delta} Re\{\,[(\omega_o^2-\omega^2) - 2j\lambda\omega_o\omega][\cos(\omega t) + j.\sin(\omega t)]\,\}$$

Vérifiez maintenant qu'on retrouve la solution de la méthode 1. C'est plus abstrait mais beaucoup plus efficace.

06G)

$\underline{F}(x)$ est une fonction à valeurs complexes de la variable réelle x positif.

Cette fonction est solution de : $\underline{F}''(x) = \frac{j}{\delta^2}\underline{F}(x)$ *où δ est un réel positif.*

*Dans le corps des complexes, c'est un équation usuelle et nous savons la résoudre. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Nous devons donc trouver **UN** système libre de deux solutions. L'ensemble des solutions sera l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux solutions.*

A tout hasard (en fait, ce n'est pas du tout un hasard), on intuite : $\underline{F}(x) = \underline{cte}.exp\,(\underline{r}x)$ *avec* $\underline{cte} \neq 0$. *On envoie cette forme dans l'équa diff,* $\underline{cte}$ *et* $exp\,(\underline{r}x)$ *non nulles se simplifient et on obtient un polynôme de degré 2 :*

$$r^2 = \frac{j}{\delta^2}$$

Il ya deux solutions à ce polynôme, donc nous avons trouvé notre base. Voilà pourquoi ce n'était pas un hasard.

Par contre, il faut savoir résoudre un polynôme dans le corps des complexes. Ici, il y a une astuce que vous avez intérêt à retenir, qui consiste à introduire la solution :

$$r^2 = \frac{j}{\delta^2} = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{\delta^2} = \left(\pm\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{\delta}\right)^2$$

On vient de trouver les deux racines : $\underline{r}_{\pm} = \pm\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{\delta} = \pm\frac{1+j}{\delta\sqrt{2}}$

On a donc une base de l'espace vectoriel de solutions : $exp\left(\frac{1+j}{\delta\sqrt{2}}x\right)$ *et* $exp\left(-\frac{1+j}{\delta\sqrt{2}}x\right)$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux fonctions soit donc :

$$\underline{F}(x) = \underline{A}.exp\left(-\frac{1+j}{\delta\sqrt{2}}x\right) + \underline{B}.exp\left(\frac{1+j}{\delta\sqrt{2}}x\right)$$

Si, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty]$ *, la solution doit rester finie, on est obligé de prendre* $\underline{B} = 0$ *pour éviter la divergence de la seconde exponentielle.*

06H)

1)La constante est en s^{-1}. Vous pouvez ajouter rad si vous voulez mais ce n'est pas une unité. m est en kg; g en $m.s^{-2}$;ℓ en m. Donc m n'interviendra pas dans la formule et on peut prendre :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

et en plus c'est la bonne.

2)On intuite $\theta(t) = cte = \theta_{eq}$ dans l'équa diff, ce qui donne : $sin(\theta_{eq}) = 0$.
Physiquement, on peut limiter cet angle dans l'intervalle : $]-\pi \quad +\pi\,]$
ce qui nous donne 2 solutions : 0 et π.

3)Il est évident avant calcul que la première est stable et la seconde est instable.
Pour la première, un dl à l'ordre 1 en $\varepsilon(t)$ donne : $\ddot{\varepsilon} + \omega_o^2 \cdot \varepsilon = 0$ ce qui correspond à un OH de pulsation ω_o. STABLE.
Pour la seconde , un dl à l'ordre 1 en $\varepsilon(t)$ donne : $\ddot{\varepsilon} - \omega_o^2 \cdot \varepsilon = 0$ ce qui donne une solution divergente. INSTABLE.

4)Il suffit tout simplement de dériver l'équation (β) et de simplifier par $\dot{\theta}$ quand le mobile est en mouvement réel.

Dans le sens inverse, il faut donc multiplier par $\dot{\theta}$ avant intégration.
Pour obtenir la constante d'intégration, il faut des CI qui nous sont fournies, on obtient :

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_o^2 \cdot \left(cos(\theta) - cos(\theta_o)\right)$$

ce qui implique que θ est compris entre $-\theta_o$ et $+\theta_o$, la vitesse ne s'annulant qu'en ces deux extrêmes (donc M ne peut pas faire demi-tour ailleurs). On a donc un mouvement oscillatoire permanent d'amplitude θ_o. Dans la réalité expérimentale, il faut tenir compte des frottements, ce qui sera fait à la fin.

5)Pour θ_o suffisamment faible, les cas a déjà été traité à la question 3 et on obtient :

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

6)Pour que la fonction $\theta(t)$ soit bijective, on ne peut travailler sur plus d'une demi-période. On va choisir de travailler sur un quart de période, $\theta(t)$ variant de 0 à $\theta_o > 0$, entre les instant t_o et t_o+T/4.

On extrait donc $\dot{\theta}$ de la relation (β) en prenant le signe + (le signe – correspondant à l'oscillation dans l'autre sens). Ensuite on sépare les variables, on pose l'intégration et on obtient la formule demandée.

7)CF cours pour la formule des trapèzes. Cette méthode ne va pas marcher ici car la fonction à intégrer n'est pas définie à la borne inférieure du domaine d'intégration. Or, on a absolument besoins de ce point dans la formule des trapèzes.

8)CALCUL LOURD. Cependant, l'intégrale converge, donc on va procéder à un changement de variable qui supprime le problème précédent.
Il y a bijection entre { θ compris entre 0 et θ_o} et {y compris entre 0 et π/2}.
On différencie le changement de variables :

$$d\left\{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\} = cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{d\theta}{2} = d\left\{sin\left(\frac{\theta_o}{2}\right)sin(y)\right\} = sin\left(\frac{\theta_o}{2}\right)cos(y)dy$$

Soit :

$$d\theta = 2\frac{sin\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}cos(y)dy$$

On a maintenant l'expression de dθ qu'on reporte dans l'intégrale et on utilise la relation fournie pour obtenir finalement l'expression proposée.
L'intégrale est maintenant calculable numériquement par la méthode des trapèzes (sauf dans le cas particulier $\theta_o = \pi$ où elle devient réellement infinie).

9)K_0 est en fait T_0, et K_1 est forcément nulle car la fonction T=T(θ_o) est forcément une fonction paire de θ_o.
IL faut aller chercher le premier terme correctif dans l'expression de l'intégrale. A l'ordre 1, les sin sont éliminés et on prend le premier terme correctif de l'inverse de la racine. L'intégrale se calcule et on obtient en faisant très attention $K_2 = \frac{1}{16}$.

10) $\frac{2}{\tau}$ doit être en s^{-1} donc τ en s. τ est un temps.

11)L'ensemble des solutions de cette équa diff est un espace vectoriel de dimension 2. Il me suffit de trouver 2 solutions différentes. L'ensemble des solutions sera alors l'ensemble des combinaisons linéaires des deux solutions trouvées.
En cherchant une solution non nulle en exp(rt), l'équa diff devient un polynôme en r de degré 2 :

$$r^2 + \frac{2}{\tau} r + \omega_o^2 = 0$$

Le déterminant est : $\Delta = \frac{4}{\tau^2}(1 - \omega_o^2 \tau^2)$
Pour un régime pseudosinusoïdal, il faut $\Delta < 0$ ce qui conduit à : $\tau\omega_o > 1$.
Dans ce cas, les deux solutions en r s'écrivent : $r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j\frac{1}{\tau}\sqrt{\omega_o^2\tau^2 - 1} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega$
ce qui donne $\omega = \frac{1}{\tau}\sqrt{\omega_o^2\tau^2 - 1}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{\omega_o^2\tau^2 - 1}}$

Les solutions réelles prennent par exemple la forme suivante : $\theta(t) = \theta_o sin(\omega t + \varphi) \cdot exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
ou $\theta_o$et φ sont les constantes d'intégration.

En se limitant aux points où le sinus n'est pas nul (id est presque toujours et on peut prolonger par continuité), on obtient : $\delta = Ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \frac{T}{\tau}$

12) On peut calculer δ avec les points B et C. On calcule $\delta \approx Ln\left(\frac{8.95}{8.02}\right) \approx 0.11$
Les points A et D permettent d'évaluer la pseudo-période $T \approx \frac{8.25-0.53}{7} \approx 1.1s$
ce qui donne $\tau \approx 10s$.

06I)*Piège de Penning. Multiples origines (ENS, CCP…)*

1a) ω_o est une pulsation en s^{-1}.

A partir de la force de Lorentz, on a que b est en N.C^{-1}.m^{-1} soit kg.C^{-1}s^{-2}.
e est en C, m en kg.

Donc $\frac{eb}{m}$ est en s^{-2}. D'un point de vue dimensionnel, on a : $\omega_o = \sqrt{\frac{eb}{m}}$

1b)x(t)=y(t)=z(t)=0 est bien une solution du problème. Donc l'électron peut a priori rester immobile en O. On vient d'obtenir une position d'équilibre, unique d'ailleurs.

Cependant, au voisinage de O, si le mouvement est stable sur l'axe Oz, il ne l'est pas sur les axes Ox et Oy car on aura une solution $exp(+\frac{\omega_o}{\sqrt{2}}t)$ divergente.

O est une position d'équilibre instable.

2a) ω_m est une pulsation en s^{-1}.

A partir de la force de Lorentz , on a B en N.s.m^{-1}.C^{-1} soit aussi kg.s^{-1}.C^{-1}

Donc $\omega_m = \frac{eB}{m}$ est en s^{-1} .

2b) La force magnétique est perpandiculaire au champ magnétique qui est selon Oz, donc sa composante sur l'axe Oz est nulle.

2c) Il suffit tout simplement de faire la première équation +j fois la seconde et de reconnaître les différents éléments. On obtient :

$$\ddot{p} - j\omega_m\dot{p} - \frac{\omega_o^2}{2}p = 0$$

Equation différentielle linéaire d'ordre 2 en p à coefficients constants. La solution est un espace vectoriel de dimension 2. Il faut donc que nous trouvions 2 solutions. La méthode proposée va nous les donner.

On intuite la forme proposée en supposant p_o non nul. On simplifie et on obtient un polynôme de degré 2 en ω :

$$\omega^2 - \omega_m\omega + \frac{\omega_o^2}{2} = 0$$

qui a deux racines réelles positives, et dont l'écriture se simplifie en tenant compte de $\frac{2\omega_o^2}{\omega_m^2} \ll 1$:

$$\omega_1 = \frac{\omega_m}{2}\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{2\omega_o^2}{\omega_m^2}}\right\} \approx \frac{\omega_o^2}{2\omega_m} \qquad et \qquad \omega_2 = \frac{\omega_m}{2}\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{2\omega_o^2}{\omega_m^2}}\right\} \approx \omega_m$$

On peut vérifier $\omega_1 \ll \omega_2$.

2d) On résout très rapidement $z(t) = z_o cos(\omega_o t)$.

La forme générale de p(t) est :

$$p(t) = A_1 \cdot exp(j\omega_1 t) + A_2 \cdot exp(j\omega_2 t) \quad d'où \quad \frac{dp(t)}{dt} = j\omega_1 A_1 \cdot exp(j\omega_1 t) + j\omega_2 A_2 \cdot exp(j\omega_2 t)$$

Les CI donnent alors : $A_1 + A_2 = x_o + 0j \quad et \quad j\omega_1 A_1 + j\omega_2 A_2 = 0 + jv_o$

Qu'on résoud et simplifie en :

$$A_1 = \frac{x_o\omega_2 - v_o}{\omega_2 - \omega_1} \approx x_o \qquad A_2 = \frac{v_o - x_o\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \approx \frac{v_o}{\omega_2} \ll x_o$$

On prend les parties réelle et imaginaire pour obtenir x(t) et y(t) :

$$x(t) = Re(p(t)) = x_o \cdot cos(\omega_1 t) + \frac{v_o}{\omega_2} \cdot cos(\omega_2 t)$$
$$y(t) = Im(p(t)) = x_o \cdot sin(\omega_1 t) + \frac{v_o}{\omega_2} \cdot sin(\omega_2 t)$$

Dans le plan Oxy, on a un cercle de rayon x_o , sur lequel se greffe un cercle de rayon beaucoup plus petit et de fréquence beaucoup plus élevée. Sur Oz, un mouvement oscillatoire sinusoïdal.

2e) Du fait du rayonnement émis par l'électron, celui-ci va perdre de l'énergie et va peu à peu se stabiliser au voisinage de O. On a donc fabriqué un piège à particules chargées. On fabrique actuellement des pièges pour les atomes et les molécules mais beaucoup plus sophistiqués (cf Prix Nobel de Physique pour Cohen-Tannoudji)

10. De la sinusoïde à la notation complexe.

10A.*Soient deux fonctions sinusoïdales $u_1=\sin(\omega t)$ et $u_2=2\sin(\omega t+\varphi)$ avec φ compris entre 0 et $\pi/2$. On dira que u_2 est en avance de phase de φ sur u_1.*

a)Tracer les formes graphiques des deux fonctions sur un même graphe. A quoi voit-on que u_2 est en avance de phase par rapport à u_1 ?

b)Si on écrit cos à la place de sin, les positions relatives des deux courbes changent-elles ?

10B.*Montrer que $x(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ est une sinusoïde de pulsation ω et d'amplitude $\sqrt{A^2+B^2}$.*
On peut utiliser : $\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$.
Que peut-on dire de la somme de deux sinusoïdes de même pulsation ?

10C.*En utilisant la notation complexe , calculer l'amplitude de $\cos(\omega t)+3\cos(\omega t+\pi/4)$ puis celle de $\cos(\omega t)+2\sin(\omega t+\pi/4)$.*

10D.*On note $i_1(t)=I.\cos(\omega t)$, $i_2(t)=I.\cos(\omega t+2\pi/3)$, $i_3(t)=I.\cos(\omega t+4\pi/3)$. En passant par la notation complexe, calculer la somme de ces trois courants.*
Application : le dernier étage mécanique d'une centrale électrique est un alternateur triphasé : le courant sortant de la phase k est $i_k(t)$. Les trois courants sont alors transportés sous très haute tension (400kV) par une ligne THT pour alimenter les zones de consommation. Intérêt ?

10E.*Trois dipôles D_1,D_2, D_3 sont en série dans un circuit. On note $i(t)$ le courant parcourant les trois dipôles et $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$ les tensions respectives aux bornes de chaque dipôle en convention récepteur.*
Un générateur alimente les trois dipôles sous la tension totale $e(t)= u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$.

On se place en régime permanent sinusoïdal de pulsation ω et on note $i(t)=I.\cos(\omega t)$ avec $I>0$. Les trois tensions complexes valent respectivement :

$\underline{U}_1=3$ V $\quad$ $\underline{U}_2=4.\exp(j\pi/4)$ V $\quad$ $\underline{U}_3=5j$ V

1)comment va-t-on écrire $\underline{I}$? Que pourrait être le dipôle D_1 ?

2)Exprimer $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$ de façon purement numérique en fonction de ω et de t. En déduire une expression de $e(t)$? Que peut-on en faire ?

3)A $e(t)$ on associe $\underline{E}$. Quelle est la relation entre les différentes tensions complexes. Par un dessin adéquat, représenter $\underline{E}$ et mesurer son amplitude et sa phase. Vérifier par le calcul.

4)Exprimer alors $e(t)$ de façon purement numérique en fonction de ω et de t. Quelle sont les avances de phase de $e(t)$ par rapport à $i(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$?

10F. *Soit la fonction $x(t)=X.\cos(\omega t+\varphi)$ à laquelle on associe $\underline{x}(t)=X.\exp[j(\omega t+\varphi)]=\underline{X}\exp(j\omega t)$. $\underline{X}$ est appelé l'amplitude complexe.*

1)Montrer : $\underline{x}(t)= x(t) + j.x(t-\pi/(2\omega))$

2)Montrer que l'amplitude complexe associée à (dx/dt) est $j\omega\underline{X}$.

Soit x(t) vérifiant EQ : $\ddot{x} + 2\lambda\omega_o\dot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 E.cos(\omega t)$. *On cherche une solution permanente x(t)=X.cos(ωt+φ) à laquelle on associe* $\underline{x}(t)$ *et* $\underline{X}$.

Montrer que $\underline{x}(t)$ *vérifie une équation différentielle très proche de EQ et qu'on peut sortir alors* $\underline{x}(t)$ *ou mieux encore* $\underline{X}$. *On peut aussi remarquer que le temps a encore disparu.*

10G. *Si x(t)=X.cos(ωt+φ) est la solution permanente sinusoïdale de* $\tau\dot{x} + x = A.cos(\omega t)$ *où les constantes sont toutes positives, exprimer l'amplitude complexe* $\underline{X}$*=X.exp[jφ] associée à x(t). Exprimer alors l'amplitude et la phase de x(t).*
Si on remplace cos par sin dans l'équation différentielle, quelle est la nouvelle écriture de x(t)?

10H. *Si x(t)=X.cos(ωt+φ) est la solution permanente sinusoïdale de*
$\ddot{x} + 2\lambda\omega_o\dot{x} + \omega_o^2 x = A.cos(\omega t + \pi/2)$ *, où les constantes sont toutes positives.*

a)Calculer l'amplitude complexe associée $\underline{X}$.

b)Exprimer tan(φ) et montrer que sa connaissance est suffisante pour déterminer φ.

10I. *On a donc :* $\underline{x}(t) = \frac{x_o}{1+j\tau\omega} exp(j\omega t) = \frac{x_o(1-j\tau\omega)}{1+(\tau\omega)^2}\big(cos(\omega t) + jsin(\omega t)\big)$

On développe en ne s'intéressant qu'à la partie réelle et on sort :

$$x(t) = \frac{x_o}{1+(\tau\omega)^2} cos(\omega t) + \frac{x_o\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2} sin(\omega t)$$

Si on veut le mettre sous la forme $x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$, *un petit travail supplémentaire est nécessaire. D'un point de vue maths, le nombre de solutions est infini, nous cherchons* $A \geq 0$ *et* φ *entre* $-\pi$ *et* $+\pi$. *Maintenant, il n'y a plus qu'une seule solution, sauf pour les emmerdeurs.*
On développe et on reconnaît terme à terme :

$$x(t) = Acos(\omega t)cos(\varphi) - Asin(\omega t)sin(\varphi)$$

D'où :

$$Acos(\varphi) = \frac{x_o}{1+(\tau\omega)^2} \quad et \quad Asin(\varphi) = -\frac{x_o\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2}$$

On fait la somme des carrés pour obtenir A en le supposant positif : $A = \frac{x_o}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$

On a alors : $cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \geq 0$ *et* $sin(\varphi) = -\frac{\tau\omega}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \leq 0$ *soit* $tan(\varphi) = -\tau\omega$

il y a une solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$*qu'on peut sortir avec la fonction Arctan, qui est la fonction inverse qui est la plus simple à utiliser. Notre solution est donc :*

$$\varphi = -Arctan(\tau\omega)$$

J. C'est maintenant l'opération inverse, on utilise :

$$cos(\omega t) = Re\big(exp(j\omega t)\big) \ \ et \ \ sin(\omega t) = Re\big(-j.exp(j\omega t)\big)$$

On a donc :

$$x(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t) = ARe\big(exp(j\omega t)\big) + B\ Re\big(-j.exp(j\omega t)\big)$$

D'où :

$$x(t) = Re\big((A - jB)exp(j\omega t)\big) \quad donc \quad \underline{x}(t) = (A - jB)exp(j\omega t) = \underline{X}exp(j\omega t)$$

et : $\underline{X} = (A - jB)$ *de norme* $X = \sqrt{A^2 + B^2}$

Pour l'argument, c'est un peu plus compliqué. $\varphi = arg\big(\underline{X}\big)$ *vérifie :*

$$cos(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \ ; \ sin(\varphi) = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}} \ ; \ tan(\varphi) = \frac{-B}{A}$$

Si A est positif, on peut imposer φ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ *et* $\varphi = -Arctan\left(\frac{B}{A}\right)$

Si A est négatif, il faut décaler de $\pm\pi$ *le résultat :* $\varphi = -Arctan\left(\frac{B}{A}\right) \pm \pi$

D'un point de vue physique, les deux valeurs représentent le même angle.

XII.Intégration des relations différentielles.

EQ0)*Si* $h(x) = \sqrt{x^2 + K}$ *et x=x(t). Comment relier* $\dot{h}$ *et* $\dot{x}$ *?*

EQ1)*1)Soit l'équation différentielle E1 :* $\ddot{s} - \omega_o^2 s = 0$ *avec* $\omega_o > 0$

a)On cherche des solutions sous la forme s(t)=A.cos(ωt+φ). Introduire la forme proposée dans l'équation et en déduire les conditions que doivent respecter A, ω et φ.

b)A l'instant initial t=0 , s vaut 1 et sa dérivée est nulle. Montrer qu'on obtient totalement s(t).

c)Cherchez la solution générale dans le corps des complexes.

c1)Extraire les solutions réelles.

c2)Résoudre 1b à partir de la solution complexe.

2)Soit l'équation différentielle E2 : $\ddot{s} + \omega_o^2 s = 0$ *avec* $\omega_o > 0$*. Chercher la solution générale dans le corps des complexes. Extraire les solutions réelles.*

3)Les deux équations différentielles E1 et E2 se ressemblent beaucoup cependant, quelle est la différence essentielle entre les solutions de ces deux équations différentielles ?

EQ2)*Dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme, une fusée décolle selon l'axe vertical Oz. Celle-ci se propulse par réaction en éjectant de la matière à un débit constant q [on peut donc écrire la masse m(t) de la fusée sous la forme m(t)=(*m_o*-qt)] pendant le temps T. La prise en compte de variation de la masse est équivalente à une force de poussée Π verticale ascendante constante. La RFD, en projection sur l'axe Oz, donne, en l'absence de frottement :*

$$m(t)\ddot{z} = -m(t)g + \Pi \qquad \text{équation } \alpha$$

A l'instant t=0,la fusée est immobile à z=0. On met en marche les moteurs.

Interpréter l'équation α. Tracer qualitativement les graphes de l'accélération , de la vitesse et de l'altitude en fonction du temps à partir de l'instant t=0.

EQ3)*Soit r(t) une fonction du temps t vérifiant :* $r^2\left(\frac{dr}{dt}\right) = -K$ *avec K constante positive et r(0)=*r_o*>0. Exprimer alors complètement r(t) et montrer que r s'annule au bout d'un temps fini.*

EQ4)*Soit θ(t) une fonction du temps t vérifiant l'équation différentielle* $(\lambda - R\theta)\dot{\theta} = K$ *où θ est une fonction du temps avec θ(0)=0 et les grandeurs définies sont des constantes positives . Relier θ et t pour t>0.*

EQ5)*Soit f(x) solution de* $f''(x) + sin(f(x)) = 0$ *. Cette expression n'est pas intégrable par rapport à x. Mais que remarque-t-on si on multiplie cette expression par f '(x)? f '(x) est alors appelé facteur intégrant.*

EQ6)*Soit un champ de température T(r), défini continu sur r compris entre 0 et R, avec T(R)=*T_o*. T(r) obéit à l'équation différentielle :* $\frac{\lambda}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -K$ *avec λ et K constantes positives.*

Donner l'expression de T(r).

EQ7)*Dans la portion d'espace x>0, la fonction s(x,t)=Re{* $\underline{f}(x)$*.exp(jωt) } où* $\underline{f}(x)$ *obéit à l'équation différentielle :* $\underline{f}''(x) = jk^2\underline{f}(x)$*. k et ω sont des constantes réelles positives.*

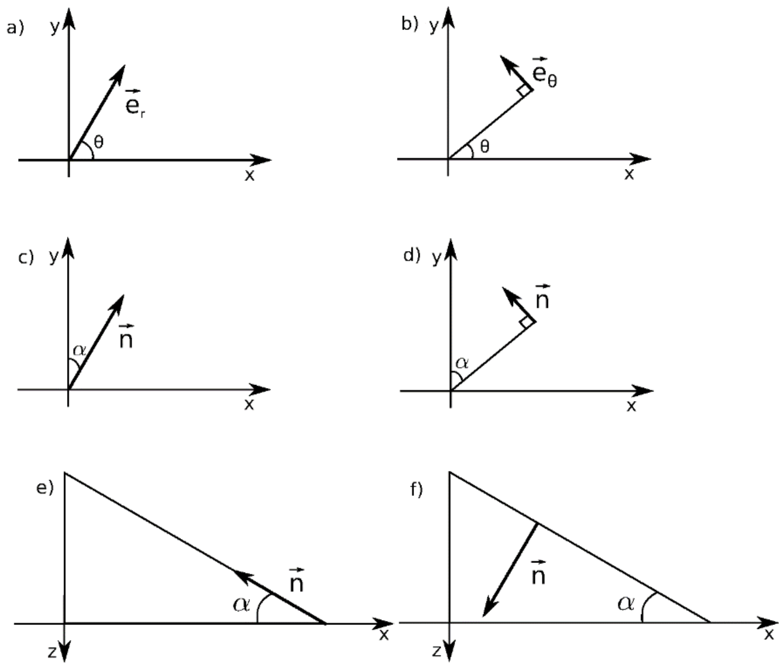
Résoudre s(x,t) en supposant s non divergente et f(0)=f_o *.*

EQ8) $\frac{dT}{dS} = \frac{T}{C_p}$ *où* C_p *est une constante positive. Relier T et S.*

XIII. Les vecteurs. XIV. Repérage d'un point dans l'espace.

A)

Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\vec{n}$, $\vec{e}_\theta$, ou $\vec{e}_r$, en fonction des vecteurs de la base cartésienne $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et/ou $\vec{e}_z$.



<u>B)Les coordonnées polaires.</u>

On s'intéresse aux mouvements plan d'une particule M de masse m. On peut repérer sa position par (x,y) en cartésiennes de base absolue $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y\right)$ ou (r,θ) en polaires de base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. (θ=0 correspond à la direction de l'axe Ox).

1)Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans les deux bases.

2)Exprimer la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ selon la base $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y\right)$.

3)Calculer alors $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ en fonction de $\dot{\theta}$ et de $\vec{e}_\theta$.

4) Calculer alors $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ en fonction de $\dot{\theta}$ et de $\vec{e}_r$.

5)En déduire alors les expressions de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ en coordonnées polaires sous la forme :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad et \quad \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$