L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet se compose d'un exercice de probabilités et d'un problème d'algèbre linéaire ; les parties de ce problème sont largement indépendantes les unes des autres.
La propreté des copies, la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et des justifications données tiendront une part prépondérante dans la notation !

Exercice

(inspiré de E3A PC 2016 maths 1)

Partie I : Configurations PPF et FPP

On dispose d'une pièce qui, lorsqu'elle est lancée, tombe sur « pile » avec une probabilité $p \in]0,1[$ et tombe sur « face » avec une probabilité $q = 1 - p$.
On répète indéfiniment un lancer de cette pièce et on note les résultats obtenus sous la forme $PFFPPPFPFF\ldots$, qui signifie qu'au premier lancer la pièce est tombée sur « pile », puis au deuxième lancer sur « face », etc...
On désigne par motif le résultat de trois lancers consécutifs. Par exemple, avec la séquence précédente, les motifs obtenus sont PFF, FFP, FPP, PPP, PPF, PFP, FPF, PFF....
On définit, pour tout entier $k \geqslant 1$, les ensembles :
- P_k : « on obtient « pile » au lancer numéro k »,
- $F_k = \overline{P_k}$: « on obtient « face » au lancer numéro k ».

On admet disposer, pour modéliser cette expérience, d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ choisi de telle sorte que les P_k et les F_k soient des événements. Avec les hypothèses ci-dessus : $\forall n \geqslant 1, P(P_n) = p, P(F_n) = q$.
On note, pour tout entier $k \geqslant 1$, les ensembles :
- U_k : « le motif PPF apparaît au cours des k premiers lancers »,
- V_k : « le motif FPP apparaît au cours des k premiers lancers »,
- X_k : « le motif PPF apparaît au lancer k » (les lancers de numéros $k-2$, $k-1$, k sont donc respectivement « pile », « pile » et « face »),
- Y_k : « le motif FPP apparaît au lancer k » (comme pour X_k).

Les différents lancers sont supposés indépendants, ce qui fait que les événements $(F_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont indépendants pour tout entier $n \geqslant 1$. On sait que ceci implique en particulier que, par exemple, $(P_1, F_2, F_3, P_4, P_5, P_6, F_7, P_8, F_9, F_{10})$ sont indépendants (pour reprendre l'exemple initial).

1. **Événements élémentaires :**
   a) Que valent les événements U_1, V_1, X_1, Y_1, U_2, V_2, X_2, Y_2 ?
   b) Exprimer, pour $k \geqslant 3$, X_k et Y_k en fonction des P_i et F_j et les U_k et V_k en fonction des X_i et Y_j.
   En déduire que les X_k et les Y_k sont des événements, puis que les U_k et les V_k sont des événements.
   c) Que valent les $P(X_k)$ et les $P(Y_k)$ pour $k \geqslant 3$?

On définit de plus, pour $k \geqslant 1$, les probabilités $u_k = P(U_k)$ et $v_k = P(V_k)$.

2. **Valeurs initiales :**
   a) Que valent u_1, v_1, u_2, v_2 ?
   b) Déterminer U_3 et V_3. En déduire u_3 et v_3 en fonction de p et q.
   c) Justifier que, pour chaque entier $k \geqslant 3$, les événements X_k, X_{k+1} et X_{k+2} sont incompatibles deux à deux. En déduire les valeurs exactes (en fonction de p et q bien sûr) de u_4, v_4, u_5 et v_5.
3. **Formule de récurrence :** soit un entier $n \geqslant 1$.
   a) Prouver que : $P_{X_{n+3}}(U_n) = P_{X_{n+3}}(U_{n+2})$.
   On admet que U_n et X_{n+3} sont indépendants (ce qui est logique puisque U_n ne dépend que des n premiers lancers et X_{n+3} de ceux d'indices $n+1$, $n+2$ et $n+3$).
   b) Quelle relation existe-t-il entre U_{n+3}, U_{n+2} et X_{n+3} ?
   En déduire que $u_{n+3} = u_{n+2} + p^2q(1 - u_n)$.
   On admet que l'on prouve par un raisonnement analogue que : $\forall n \geqslant 1, v_{n+3} = v_{n+2} + p^2q(1 - v_n)$.
4. **Identification et limite :**
   a) Montrer que $\forall n \geqslant 1, u_n = v_n$.
   La probabilité d'apparition du motif PPF est donc la même que celle du motif FPP.
   b) Déterminer $P(U)$ et $P(V)$ où U et V sont les événements « le motif PPF apparaît au cours de l'expérience (à n'importe quel lancer) » et « le motif FPP apparaît au cours de l'expérience ».
   On pourra commencer par justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Partie II : Paradoxe de Penney

On reprend les mêmes notations que celles de la partie précédente.
Par contre, cette répétition de lancers de la pièce est un jeu qui oppose Ambre et Bader.
La pièce est lancée plusieurs fois de suite jusqu'à ce que trois lancers consécutifs fournissent le motif PPF ou FPP. Par rapport à la première partie, on peut convenir que les lancers continuent indéfiniment même après l'apparition du motif PPF ou FPP mais la partie sera gagnée par Ambre ou Bader. Par exemple, $PF\underbrace{FPP}PFPFF\dots$ voit la victoire de Bader au cinquième lancer même si on a des lancers ensuite.
Dans le premier cas (motif PPF en premier) c'est Ambre qui gagne, dans le second (motif FPP en premier) c'est Bader.
On définit, pour tout entier $m \geqslant 1$, les nouveaux ensembles :

— A_m : « Ambre gagne au lancer numéro m » (au lancer m et pas avant),
— B_m : « Bader gagne au lancer numéro m » (au lancer m et pas avant),
— A : « Ambre gagne »,
— B : « Bader gagne ».

1. Exprimer A_m et B_m en fonction des U_i et V_j. En déduire que les A_m et les B_m sont des événements pour $m \geqslant 1$. Faites de même pour A et B.

2. Victoire d'Ambre

a) Montrer, pour $m \geqslant 3$, que $A_m = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{m-1} \cap F_m$.

b) En déduire la valeur de $P(A_m)$ en fonction de p et q. Puis de $P(A)$ en fonction de p.

3. Victoire de Bader

a) Montrer que $P(A \cup B) = 1$.

b) En déduire $P(B)$ en fonction de p.

4. Si $p = \dfrac{1}{2}$, calculer $P(A)$ et $P(B)$.

5. Quelle valeur de p choisir pour que le jeu soit équitable ?

fin de l'exercice

Problème

(Inspiré de CCP MP 2012 maths 2)

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne, qui vaut 1).
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.
Pour tout $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$.
L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On note ϕ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de ϕ_A.
Les parties sont indépendantes entre elles.

Partie I. Généralités et exemples

1. Vérifier que l'application ϕ_A est linéaire et que I_n et A appartiennent à $\ker \phi_A$.

2. Dans cette question, on suppose $n = 2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Donner la matrice de ϕ_A dans la base $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) En déduire que ϕ_A est nulle si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc que ϕ_A n'est pas nulle.

d) Montrer que A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

e) Vérifier que $\mathcal{X}_{\phi_A} = X^2\left(X^2 - (d-a)^2 - 4bc\right)$.

f) En déduire que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

3. Dans cette question, on suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un projecteur, donc qui vérifie $A^2 = A$; on suppose également que $A \neq 0$ et $A \neq I_n$.

a) Montrer que $X^3 - X$ est annulateur de ϕ_A.

b) Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de ϕ_A ?

c) Justifier que ϕ_A est diagonalisable et que $0 \in \mathrm{Sp}(\phi_A)$.

d) Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $r \in [\![1, n-1]\!]$ tels que $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

e) Soient $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ et $M = P \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Calculer $\phi_A(M)$.

f) En déduire $\mathrm{Sp}(\phi_A)$.

Partie II. Étude des valeurs propres de ϕ_A

Dans cette partie, même si la matrice A est réelle, on la considère comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ce qui est possible car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
On prolonge ϕ_A en un endomorphisme $\widetilde{\phi}_A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad , \quad \widetilde{\phi}_A(M) = AM - MA$$

La matrice A étant réelle, on admettra que ϕ_A et $\widetilde{\phi}_A$ ont les mêmes polynômes caractéristiques : $\mathcal{X}_{\phi_A} = \mathcal{X}_{\widetilde{\phi}_A}$.

4. Soient α et β deux valeurs propres complexes de A. On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à α.

a) Justifier qu'il existe un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, tel que $A^T Y = \beta Y$

b) En calculant $\widetilde{\phi}_A(XY^T)$, montrer que $\alpha - \beta$ est une valeur propre de ϕ_A.

c) En déduire que $\alpha - \overline{\alpha}$ est valeur propre de $\widetilde{\phi}_A$ puis que si ϕ_A est trigonalisable alors A est trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

5. Soient maintenant λ une valeur propre (complexe) de $\widetilde{\phi}_A$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\widetilde{\phi}_A(M) = \lambda M$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k M = M(A + \lambda I_n)^k$

b) En déduire $P(A)M = MP(A + \lambda I_n)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ puis que la matrice $\mathcal{X}_A(A + \lambda I_n)$ n'est pas inversible.

c) En écrivant $\mathcal{X}_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$, les α_i étant complexes et éventuellement égaux, et en calculant $\det[\chi_A(A + \lambda I_n)]$, montrer qu'il existe deux indices i et j tels que $\lambda = \alpha_i - \alpha_j$.

d) Si on suppose A trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), ϕ_A est-il trigonalisable ?

Partie III. Étude de diagonalisabilité

On note $\mathcal{B}_c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

9. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.
On note $\mathcal{B}_e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i. On note alors P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}_e$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Enfin, pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$$

a) Exprimer, pour tout couple (i, j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

b) Démontrer que, pour tout couple (i, j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A.

c) En déduire que ϕ_A est diagonalisable.

10. On suppose dans cette question que ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $(P_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ une base de vecteurs propres de ϕ_A et, pour tout couple (i,j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.
On note λ une valeur propre réelle de A (dont l'existence est assurée par la partie II) et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $(X \neq 0)$ une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

a) Démontrer que, pour tout couple (i,j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

b) En déduire que A est diagonalisable. On pourra commencer par montrer que si $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Y = MX$.

Partie IV. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à la valeur propre 0

On note m la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[A]$:

$$m = \dim(\mathbb{R}[A]) = \dim\{P(A), P \in \mathbb{R}[X]\}$$

11. a) Justifier que la famille $(I_n, A, \dots, A^m)$ est liée et en déduire l'existence d'un polynôme P annulateur de A, non nul et tel que $\deg(P) \leqslant m$.

b) Montrer que $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}\left\{I_n, A, \dots, A^{d-1}\right\}$, où $d = \deg(P)$; on pourra utiliser une division euclidienne par P.

c) En déduire que $d = m$ puis que la famille $\left(I_n, A, \dots, A^{m-1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

12. Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker\phi_A$ et en déduire une minoration de $\dim\ker\phi_A$.

13. *Cas où u est diagonalisable*

On suppose, dans cette question, que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, $E_{\lambda_k}(u)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k.
On note m_k la dimension de cet espace propre.

a) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \ker\phi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, $E_{\lambda_k}(u)$ est stable par v (c'est-à-dire $v\left(E_{\lambda_k}(u)\right) \subset E_{\lambda_k}(u)$).

b) En déduire que $B \in \ker\phi_A$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

c) Préciser la dimension de $\ker\phi_A$.

d) Lorsque $n = 5$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k.

14. *Cas où u est nilpotent d'indice n*

On suppose, dans cette question, que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

a) Démontrer soigneusement que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

b) Soient $B \in \ker\phi_A$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Démontrer que si $v(e_1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ alors $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

c) En déduire $\ker\phi_A$.

Partie V. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de ϕ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$).

15. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$.

16. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = 0$; on pourra raisonner par l'absurde.