PSI2 **DS6** samedi 21 janvier 2023

L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème indépendants ; les parties de ce problème sont largement indépendantes les unes des autres.
La propreté des copies, la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et des justifications données tiendront une part prépondérante dans la notation !

Exercice

Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on définit, lorsque cette limite existe,

$$E(A) = \lim_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n$$

1. **Question préliminaire.**
Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Montrer que si ces deux suites convergent respectivement vers L_A et L_B alors
$$\lim_{k\to+\infty} A_k \times B_k = L_A \times L_B$$

2. **Un exemple.**
Dans cette question, on suppose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que A est diagonalisable.
   b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\left(I_3 + \frac{1}{n}A\right)^n = \alpha_n I_3 + \beta_n A$.
   c) En déduire que $E(A)$ existe et qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $E(A) = Q(A)$.

3. **Cas des matrices diagonalisables.**
   a) Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.
   Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$.
   b) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable.
      i. Montrer que $E(A)$ existe.
      ii. Montrer que $\det(E(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.
      iii. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.

4. **Cas des matrices nilpotentes.**
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ nilpotente et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.
   a) Montrer que $E(A)$ existe.
   b) Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que A et B commutent et que $E(B)$ existe. On admet que, pour tout entier i compris entre 1 et p,
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^{n-i}$$
   Montrer que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B)$.
   c) Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.
   d) Montrer que $E(A) - I_p$ est nilpotente.

fin de l'exercice

Problème

(inspiré CCP PC 2011 maths 2)

Partie I : Étude d'une série de fonctions

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$v_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Lorsque la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n(x)$ converge, on note $V(x)$ sa somme :

$$V(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

1. Montrer que V est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que V est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de sa dérivée $V'(x)$ en fonction de $U(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$

a) La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

b) Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $U(x)$; on pourra utiliser une comparaison avec une intégrale.

c) La série de fonction $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

4. On définit la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, p_n(x) = x\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

a) Justifier que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de sa limite en fonction de $V(x)$.

Dans la suite la limite de $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sera noté $p(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n(x) = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

b) Justifier que p est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie II : Développement eulérien de la fonction sh

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, on définit le polynôme Q_n par

$$Q_n = \frac{(1+X)^{2n} - (1-X)^{2n}}{2}.$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n.

2. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} Q_n\left(\frac{x}{2n}\right) = \mathrm{sh}(x)$

3. a) Résoudre l'équation $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = 1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

b) En déduire la factorisation de Q_n :

$$Q_n = 2nX\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 + \tan^2\frac{k\pi}{2n}\right)$$

c) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{Q_n(x)}{x}$ et en déduire

$$Q_n = 2nX\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{X^2}{\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)$$

4. a) Montrer que pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\dfrac{1}{\tan^2 t} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\tan^2 t}$

b) En déduire, si $x \in \mathbb{R}$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$1 + \frac{\left(\frac{x}{2n}\right)^2}{\tan^2 \frac{k\pi}{2n}} \leqslant 1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} \leqslant \left(1 + \left(\frac{x}{2n}\right)^2\right) \left(1 + \frac{\left(\frac{x}{2n}\right)^2}{\tan^2 \frac{k\pi}{2n}}\right)$$

puis un encadrement de $v_k(x)$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$.

c) Conclure, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$V(x) = \ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)$$

5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$U(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} - \frac{1}{x}$$

6. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. *On pourra s'intéresser à la limite quand x tend vers 0 de* $\dfrac{U(x)}{x}$.

Partie III : Une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^{\pi t} - 1} \, \mathrm{d}t$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \dfrac{1}{2} U(x)$. *On pourra utiliser l'inégalité $|\sin t| \leqslant t$, valable pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.*

3. a) Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(xt)e^{\pi t}}{\left(e^{\pi t} - 1\right)^2} \, \mathrm{d}t$.

b) En déduire, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{4} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{x^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi u}{2x}\right)} \, \mathrm{d}u$.

c) Vérifier $\operatorname{sh}(t) \geqslant t$ si $t > 0$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ sous la forme d'une intégrale.

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} \, \mathrm{d}u$.