PSI2. Proposition de correction d'exercices d'électrocinétique.

Exercice 2.

1a)Les potentiels électriques étant définis à une constante additve près, on peut fixer la valeur d'un potentiel. Si on choisit $V_D=0$, alors on a $V_C=E$.

1b)On obtient :

$$\frac{1}{R_1}(E-V_A)+\frac{1}{R_2}(0-V_A)+(-i)=0$$

$$\frac{1}{R_4}(E-V_B)+\frac{1}{R_3}(0-V_B)+i=0$$

1c)La première équation permet de sortir V_A=… ; la seconde de sortir V_B=…
Et on obtient finalement :

$$u=V_A-V_B=\frac{R_2R_4-R_1R_3}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}\cdot E-\left(\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)}+\frac{R_3R_4}{(R_3+R_4)}\right)i=E_g-R_gi$$

Le pont de Wheatstone est équivalent à un générateur linéaire de Thevenin dont la fem est E_g et de résistance interne R_g.

2)Si D est un dipôle passif, la puissance reçue par ce dipôle est positive, donc la puissance fournie par E_g=E_gi est positive ou nulle. Eg et i sont de m^me signe et s'annulent en même temps. Donc si $R_2R_4>R_1R_3$ alors E_g>0 et i>0. Contraposée évidente.

$$i=0\quad est\ \text{é}quivalent\ \text{à}\ R_2R_4=R_1R_3$$

3)On peut avoir une évaluation de R_1 par : $R_1=\frac{R_2R_4}{R_3}=12\Omega$.

Exercice 3.

1)$P_g=u\cdot i$.

2)D'autre part u=E-Ri donc on peut éliminer i dans le caclcule t obtenir : $P_g=\frac{E(E-u)}{R}$.
le dipole est passif donc la puissance reçue par le dipole est positive ou nulle donc u est compris entre 0 et E inclus.

3)$P_g(0)=P_g(R)=0$ et est une fonction positive continue de u donc il y a au moins un maximum qu'on peut chercher en dérivant $P_g(u)$. La rérivée ne s'annule qu'une fois en u=E/2 et on a donc forcément un maximum et on calcule alors la valeur fournie de P_M.

Dans ce cas de fonctionnement, D se comporte comme une résistance R (mais il ne l'est pas forcément).

4)R=0 pour un générateur de tension parfait, donc celui-ci peut fournir n'importe quelle puissance électrique !!!

5)D'un point de vue tension électrique, on a le même générateur sauf que l'assemblage de piles ne peut fournir que 4,5W alors que la batterie auto pourrait fournir par intermittences jusqu'à 14kW , suffisant pour faire tourner un moteur électrique susceptible de faire démarrer le moteur thermique.

Exercice 4.

1)On a continuité temporelle de la tension aux bornes d'un condensateur donc :

$$u(0^+) = u(0^-) = 0$$

La seconde résistance est donc court-circuitée au début et il n'y circule alors aucunt courant.
La LDM donne alors : $i(0^+) = \frac{E}{R}$ qui traverse alors entièrement les econd condensateur. La caractéristique courant-tension d'un condensateur donne alors : $\dot{u}(0^+) = \frac{E}{RC}$.
Au début du régime transitoire , un condensateur se comporte comme un interrupteur fermé.

2)Une fois le régime permanent continu installé, un condensateur devient un interrupteur ouvert et le courant devient alors nul dans toutes les branches : u et i sont alors nulles.
Attention : le premier condensateur est chargé.

3)A partir du circuit fourni, on peut définir la constante de temps τ=RC=1ms. Donc on peut penser que le régime transitoire va durer quelques millisecondes.

4)On peut utiliser un PDT.
Le premier groupe RC série définit une impédance $\underline{Z_1} = R + \frac{1}{jC\omega}$.
Le second groupe RC parallèle définit une admittance $\underline{Y_2} = \frac{1}{\underline{Z_2}} = jC\omega + \frac{1}{R}$
Le PDT donne : $\underline{U} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\underline{E} = \frac{\underline{E}}{1+\underline{Z_1}\cdot\underline{Y_2}}$. On remplace et on obtient :

$$\underline{U} = \frac{jRC\omega\underline{E}}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

On fait le produit en croix. Multiplier par jω en complexe revient à dériver temporellement la grandeur électrique réelle et on obtient pour t>0 :

$$u + 3RC\dot{u} + (RC)^2\ddot{u} = RC\dot{E} = 0$$

qui devient avec les notations de l'énoncé :

$$\ddot{u} + 3\omega_o\dot{u} + \omega_o^2 u = 0$$

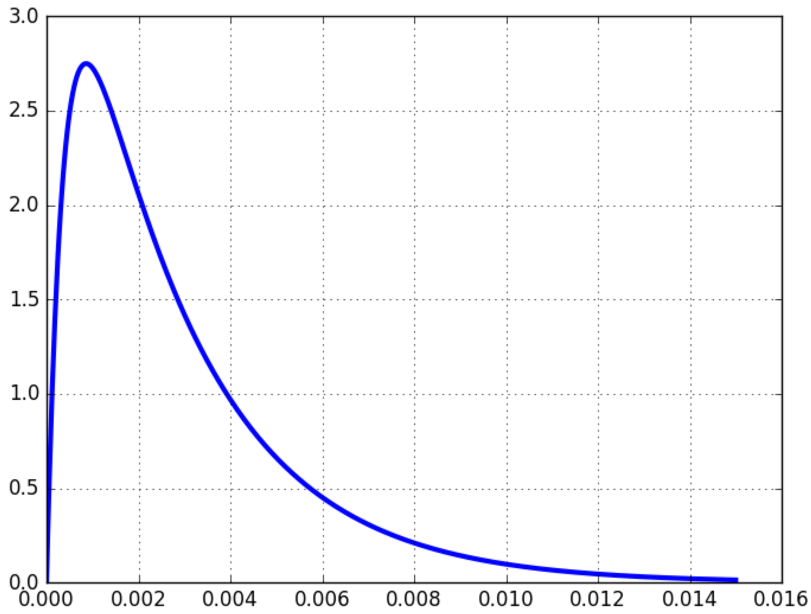
5)On a une équation différentielle d'ordre 2 et on a deux conditions initiales. On a donc tout ce qui faut pour résoudre entièrement.

Une solution particulière est la fonction nulle.

Pour la solution générale sans second membre, il nous faut une base soit deux solutions différentes. On va les obtenir en cherchant des solutions de la forme A.exp(rt). On obtient alors : $r^2 + 3\omega_o r + \omega_o^2 r = 0$ qu'on résoud en : $r_- = \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\omega_o$ *et* $r_+ = \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\omega_o$ toutes deux réelles négatives.
Et la solution générale de l'équa diff s'écrit :

$$u(t) = A \cdot exp(r_- t) + B \cdot exp(r_+ t)$$

où A et B sont des constantes d'intégration qu'on déterminera à partir des CI obtenues dans les questions précédentes.
Pour la forme graphique, la solution part de 0 pour y revenir asymptotiquement sans oscillations car le régime est apériodique. La résolution numérique sous Python avec E=10V donne avec t en s en abscisses et u en V en ordonnées :



On peut remarquer qu'on avvait correctement évaluer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
Pour les plus ambitieux , la résolution littérale complète donne : $B = -A = \frac{E}{\sqrt{5}}$.

Exercice 5.

1)Si le tube est éteint, on charge le condensateur sous la tension E=100V, avec la constante de temps τ=1s. On a un circuit d'ordre 1 , dont l'équa diff est : $u(t) + \tau\dot{u}(t) = E$
Loi exponentielle d'asymptote E=100V, partant de u(0)=0 pour u(t). Donc à un instant donné t_1, on passe par 80V et le tube s'allume

2)Si le tube est allumé, en utilisant l'analogie Thevenin-Norton, on revient à circuit d'ordre 1 donc l'aqua diff est : $u(t) + \tau\dot{u}(t) = E'\ avec\ \tau' = R_eC = 0{,}1s\ \ et\ E' = \frac{R\prime}{R+R\prime}E \approx 11V$
La tension va décroitre exponentiellement de 80V à environ 11V. En chemin, on passe par 60V et donc le tube s'éteint à un instant t_2.

3)On revient au système initial et la tension vers 100V et repasse par 80V. On a un phénomène oscillant. Du fait des constantes de temps, la descente est plus rapide que la montée.

Exercice 6.

0)$\omega_o=10^4$ s^{-1}. Q=10.

1)On peut définir les 3 courants en convention récepteur par rapport à u. Ils sont ici tous les 3 vers le bas et leur somme algébrique est évidemment nul (LDN).

2)On a continuité de la tension aux bornes de C donc $u(0^+) = u(0^-) = \frac{q_o}{C}$.

On a continuité du courant circulant dans la bobine donc $i_L(0^+) = \ i_L(0^-) = 0$

La loi d'Ohm permet de calculer : $i_R(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = \frac{q_o}{RC}$.

La LDN permet alors de déterminer : $i_C(0^+) = -\,i_R(0^+) - \ i_L(0^+) = -\frac{q_o}{RC}$.

On peut alors obtenir la seconde CI : $\dot{u}(0^+) = -\frac{q_o}{RC^2}$

Au bout d'un temps infini, toute l'énergie initialement stockée dans le condensateur aura été consommée par la résistance. Toutes les grandeurs électriques sont nulles.

3)On suppose un RSP de pulsation ω et on applique la LDN en termes de potentiel sur le nœud haut. On met l'origine des potentiels au nœud bas.

La LDN s'écrit alors :

$$jC\omega\left(0-\underline{U}\right)+\frac{1}{jL\omega}\left(0-\underline{U}\right)+\frac{1}{R}\left(0-\underline{U}\right)=0$$

On remet en forme sans éliminer U. On obtient :

$$LC(j\omega)^2\underline{U}\ +\ \frac{L}{R}(j\omega)\underline{U}\ +\ \underline{U}\ = 0$$

Ce qui donne en réel :

$$LC\ddot{u}\ +\ \frac{L}{R}\dot{u}\ +\ u\ = 0$$

Puis la forme proposée dans l'énoncé :

$$\ddot{u} + Q\omega_o\dot{u} + \omega_o^2 u\ =\ 0$$

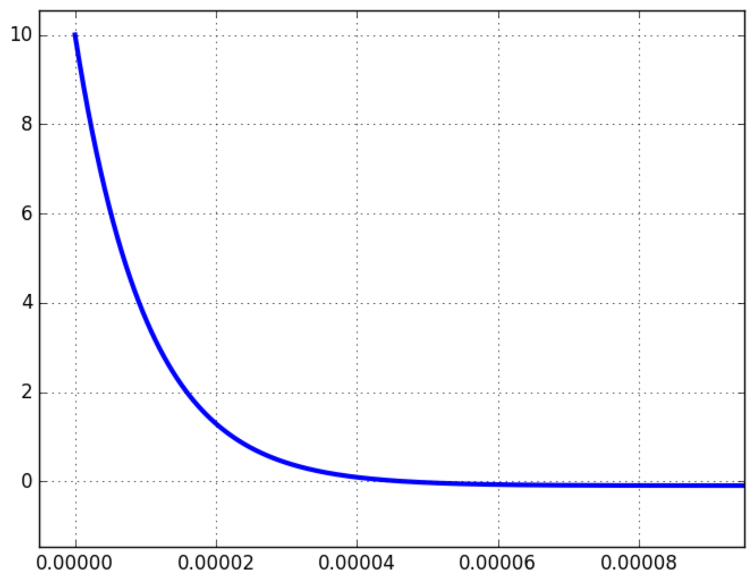
3)Une solution particulière est la fonction nulle. Il me faut une base de l'ensemble des soltions générales. La recherche en exp(rt) donne :

$$r^2 + Q\omega_o r + \omega_o^2\ =\ 0$$

dont le discriminant est : Δ= $(Q^2-4)\omega_o^2 > 0$

On a donc un régime apériodique, qui ressemble ici à une exponentielle décroissante usuelle.

Un calcul sous Python avec $u_o=q_o/C$=10V sur une durée de 0,1ms donne :



Abscisse : temps t en s Ordonnée : tension u en V.

Exercice 7.

Comportement de la bobine : s'oppose à la variation de courant en régime transitoire; fil de jonction pour le régime permanent continu.
Si vous lisez bien l'énoncé, aucune équa diff à résoudre.

1)L'énoncé ne le dit pas, mais les courants doivent être nuls avant la fermeture de K.
A la fermeture de K, continuité du courant circulant dans la bobine donc $i_1(0^+) = 0$. On obtient bien entendu $i_2(0^+) = \frac{E}{R_2} = 0{,}3\ A$.

2)a)On a attendu très longtemps donc le régime permanent continu s'est établi, la bobine est un fil de jonction. On obtient : $i_1(0^-) = \frac{E}{R_1} = 3\ A$

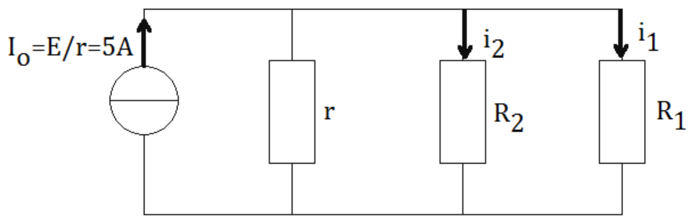
2b)Juste avant l'ouverture de K, on a i_2=0,3A. Juste après l'ouverture de K, il n'y a plus qu'une seule maille et $i_2=-i_1$. D'autre part, la bobine impose la continuité temporelle de i_1. Donc, brutalement i_2 passe de 0,3A à -3A ; de même, u_2 passe de brutalement de 6V à -60V.

2c)Juste avant l'ouverture de l'interrupeteur, la lampe semble éteinte. A l'ouverture, elle brille momentanément. On a mis en évidence le phénomène d'autoinduction de la bobine.
C'était une des prmeières utilisations de bobines : fabriquer des hautes tensions transitoires, par exemples pour provoquer une étincelle dans une bougie, elle-même dans un cylindre rempli d'un mélange explosif.

3)La prise en compte de la résistance interne du générateur va compliquer les calculs.

a)Peu de changements. A la fermeture de K, continuité du courant circulant dans la bobine donc $i_1(0^+) = 0$. On obtient bien entendu $i_2(0^+) = \frac{E}{r+R_2} = 0{,}24\ A$.

b)Juste avant l'ouverture, on est en régime permanent continu et la bobine se comporte comme un fil de jonction. On transforme le Thevenin en Norton et on utilise un PDC.



On calcule alors :

$$i_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r}} I_o \approx 3{,}55\ A$$

$$i_2 = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r}} I_o \approx 0{,}33\ A$$

Juste après l'ouverture, i_1 est le même et i_2 passe brutalement à $-i_1$. Il s'agit évidemment d'un régime transitoire. Les deux courants vons en fait s'annuler avec la constante de temps $\tau = \frac{L}{R_1+R_2}$.

Exercice 8.

Vérifiez qu'à la résonnance d'intensité, les tensions complexes aux bornes de L et C sont opposées et les deux dipoles s'éliminent. Le générateur alimente en fait la résistance , donc on a $E = RI_{max}\sqrt{2}$.
La racine de 2 est obligatoire car les définitions des deux grandeurs sont différentes. TRES VICIEUX.
On sort : R=71Ω.

Il reste 2 inconnues L et C et 2 informations : $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 500Hz$ $\quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{f_o}{\Delta f} = 5$
Le produit permet d'obtenir C. Le rapport donne L.

$$C = \frac{\Delta f}{2\pi R f_o^2} \approx 0{,}9\mu F$$
$$L = \frac{R}{2\pi\Delta f} = 0{,}11H$$

Evidemment, il faut connaître les propriétés de la résonnance d'intensité.

Exercice 9.

A u(t), on associe $\underline{u}(t)=\underline{U}\exp(j\omega t)$ avec $\underline{U}=U$
A i(t), on associe $\underline{i}(t)=\underline{I}\exp(j\omega t)$ avec $\underline{I}=I.\exp(j\varphi)$
Avec les amplitudes complexes, on peut travailler comme en continu en remplaçant résistance (resp conductance) par impédance (resp admittance).
Comme on est en convention récepteur, on a : $U = \underline{Z}\cdot\underline{I} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)\cdot\underline{I}$ d'où :

$$\underline{I} = \frac{U}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

On calcule maintenant : $I = \|\underline{I}\| = \frac{U}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ $\quad et \quad \varphi = Arg(\underline{I}) = -Arctan\left(\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}\right)$
Rem : pas de pb pour la définition de l'argument.

Si on change tous les cos par sin, on obtient exactement les mêmes formules et on peut indifféremment utiliser l'une ou l'autre ligne trigo. Par contre, il ne faut pas mélanger.

f_o n'est pas définie dans l'énoncé mais il semble clair qu'il s'agit de la fréquence de résonnance d'intensité définie par $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.j
A vérifier par vous-même : si $f<f_o$ alors φ compris entre 0 et $+\pi/2$ et le courant est en avance sur la tension d'alimentation. Autrement c'est l'inverse.

Exercice 10.

1) $\underline{E} = E$ $\underline{I_1} = I_1 exp(j\varphi_1)$ $\underline{I_2} = I_2 exp(j\varphi_2)$

2)La LDM donne : $\underline{I_1} = I_1 exp(j\varphi_1) = \frac{E}{R+jL\omega}$ $\underline{I_2} = I_2 exp(j\varphi_2) = \frac{E}{R+\frac{1}{jC\omega}}$

On peut alors sortir les normes et arguments :

$$I_1 = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \qquad \varphi_1 = -Arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) \qquad I_2 = \frac{C\omega E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \qquad \varphi_2 = Arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$

φ_1 est compris entre $-\pi/2$ et 0. φ_2 est compris entre 0 et $+\pi/2$.

3)En quadrature signifie que les deux angles sont égaux à $\pi/2$ près, soit forcément ici : $\varphi_2=\varphi_1+\pi/2$ et on obtient $\tan(\varphi_2)=\tan(\varphi_1+\pi/2)=-1/\tan(\varphi_1)$.

En utisant les résulats de la question 2, on obtient $L=R^2C$ et cette relation est indépendante de la fréquence.

4)Posons $\tau=RC=L/R$. On peut alors obtenir : $\underline{I_1} = \frac{1}{1+j\tau\omega}\frac{E}{R}$ $\underline{I_2} = \frac{j\tau\omega}{1+j\tau\omega}\frac{E}{R}$

On remarque alors :

$$\underline{U_{AB}} = R\left(\underline{I_2} - \underline{I_1}\right) = -\left(\frac{1 - j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}\right)E$$

La tension u_{AB} a la même amplitude que la tension e(t) mais est en avance de phase sur e(t). On a fabriqué un circuit déphaseur.

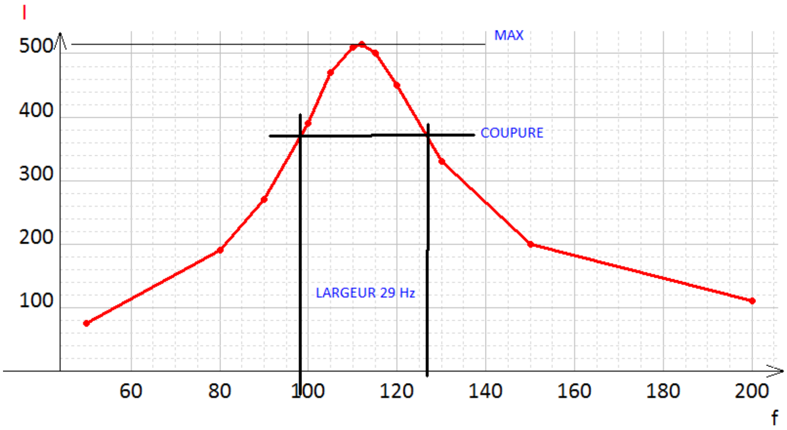
A très basse fréquence ($\tau\omega$<<1), en phase.

A très haute fréquence ($\tau\omega$>>1), avance de 2π donc en phase.

A $\tau\omega$=1, avance de phase de π, donc en opposition de phase.

Exercice 11.

On peut faire le traitement à la main en faisant apparaître les fréquences de résonnance et de coupure :



La fréquence de résonnance est vue à 112Hz et la largeur de la bande passante est de 29Hz. Ce qui permet de calculer le facteur de qualité Q=112/29 soit environ 3,9.

A la résonnance, le circuit est purement résistif et on a donc E=(R+r)I, ce qui permet de calculer r et d'obtenir : $r = \frac{E}{I} - R \approx 1\Omega$.

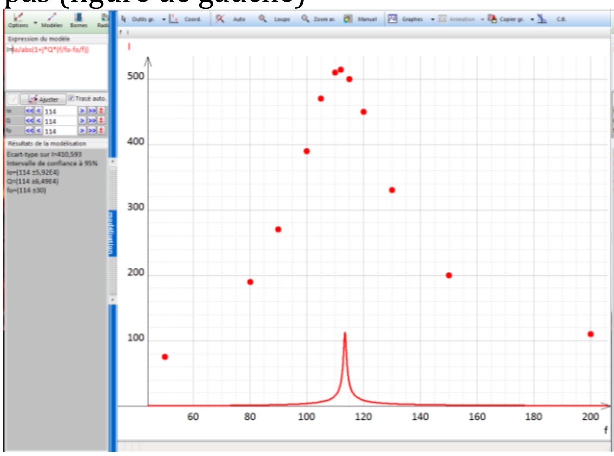
On a donc maintenant les deux relations : $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 112Hz \quad et \;\; Q = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{f_o}{\Delta f} \approx 3{,}9$

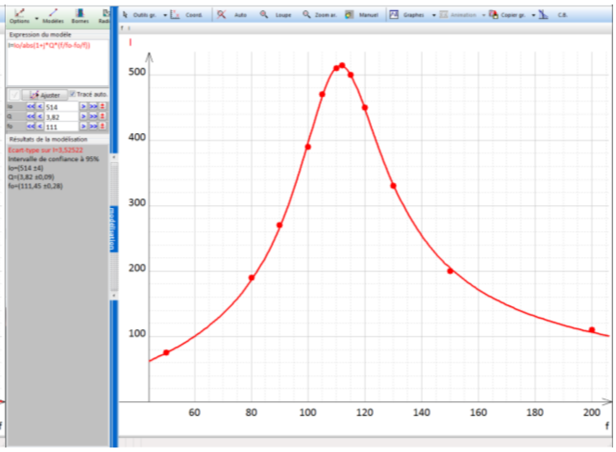
qu'on résoud en :

$$L = \frac{Q(R+r)}{2\pi f_o} \approx 60mH \qquad\qquad C = \frac{1}{2\pi f_o Q(R+r)} \approx 360\mu F$$

Pour la bobine, on est proche de nos bobines usuelles de labo. Par contre, c'est un gros condensateur.

On peut faire aussi la modélisation en aidant un peu le logiciel (ici regressi) qui au début ne trouve pas (figure de gauche)





Finalement il trouve $f_o = 111{,}5 \pm 0{,}3 \;\; Hz$ *et* $Q = 3{,}82 \pm 0{,}1$ pour un intervalle de confiance de 95%.

Exercice 12.

Vérifiez si votre machine gère les nombre complexes. J'ai utilisé le module cmath de python pour les AN. L'approximation à 2 chiffres n'est pas toujours pertinente.

0)$\underline{U}$=U donc argument nul : u(t)=U.cos(ωt)

1)$\underline{Z_1}$=100+75j Ω soit aussi 125.exp(j0,64) Ω Réponse a

2) $\underline{Z_2}$=150-200j Ω soit aussi 250.exp(-j0,93) Ω Réponse b

3)Les deux branches sont en parallèles, donc son admittance est $\underline{Y}=\underline{Y_1}+\underline{Y_2}$.
La loi d'ohm donne $\underline{I}=\underline{Y}.U$=2,2-0,4j A = 2,24.exp(-j0,18) A Réponse d peut-être.

4)$\underline{U_{SQ}} = \frac{jL\omega}{\underline{Z_1}} U = 90 + 120j\ V$ $\underline{U_{TQ}} = \frac{R_2}{\underline{Z_2}} U = 90 + 120j\ V$

5) $\underline{U_{ST}} = \underline{U_{SQ}} - \underline{U_{TQ}} = 0.$ Réponse c

Remarque importante : ce résultat est en fait évident, car on a en fait un pont de Wheatstone équilibré (voir exer 2 page 1 de la même feuille d'exercice) :

$$R_1.R_2 = (jL\omega).\left(\frac{1}{jC\omega}\right)$$

Un petit fûté peut répondre à la dernière question sans avoir fait les précédentes. Il suffit de reconnaître le pont de Wheatstone.

psi2. Corrigé de quelques exercices électronique fonctions de transfert.

Exercice A.

$$H_o = Q = \frac{1}{3} \quad et \quad \omega_o = \frac{1}{RC}$$

Exercice B.

1)Il s'agit d'un filtre passe-bande du second ordre, de fréquence de résonnance f_o, de gain maximum 1, et de bande passante à -3dB : Δf=10Hz.

Le diagramme de Bode revient à tracer H_{dB}=20log(|$\underline{H}$|) et φ=Arg($\underline{H}$) en fonction de x=log(f/f_o).

En BF soit f<<f_o, on cherche le terme prépondérant pour $\underline{H}$

$$\underline{H} \approx \frac{1}{-jQ\frac{f_o}{f}} \qquad soit \qquad H_{dB} \approx 20log\left(\frac{f}{f_o}\right) - 20log(Q) = 20x - 40 \qquad et \quad \varphi \approx +\frac{\pi}{2}$$

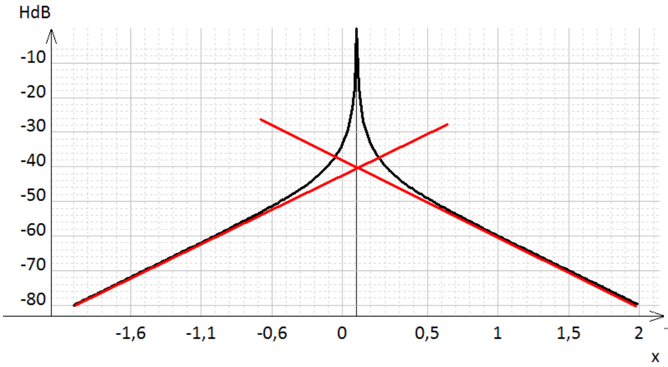
DROITE DE PENTE +20dB/décade

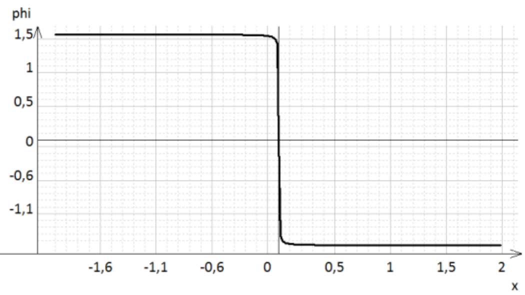
En HF soit f>>f_o, on cherche le terme prépondérant pour $\underline{H}$

$$\underline{H} \approx \frac{1}{jQ\frac{f}{f_o}} \qquad soit \qquad H_{dB} \approx -20log\left(\frac{f}{f_o}\right) - 20log(Q) = -20x - 40 \qquad et \quad \varphi \approx -\frac{\pi}{2}$$

DROITE DE PENTE -20dB/décade

Les courbes obtenues par simulation avec regressi :





Courbe en noir, asymptotes en rouge.

2)A cette fréquence, le gain complexe vaut 1 donc le signal de sortie est identique au signal d'entrée.

3)On calcule $\underline{H}(2f_o) = \frac{1}{1+300j} \approx \frac{1}{300j}$ donc $H \approx \frac{1}{300} \approx 3{,}3\ 10^{-3}$ $\quad et \quad Arg(\underline{H}) \approx -\frac{\pi}{2}$

Le signal d'entrée voit son amplitude divisée par 300 et la sortie est en retard de $\pi/2$ sur l'entrée.

4)Le signal d'entrée est en fait la somme des deux précédents signaux. Comme on est en physique linéaire, la réponse permanente est la somme des deux réponses précédentes :

$$s(t) = 1.cos(2\pi f_o t) + 0{,}0033cos\left(4\pi f_o t - \frac{\pi}{2}\right) \quad V$$

On ne verra certainement pas la seconde sinusoïde à l'oscilloscope.

5)Un signal carré de 200Hz est la somme de sinusoïdes de fréquences successives :

200Hz, 600Hz , 1000Hz=f_o, 1400Hz,...

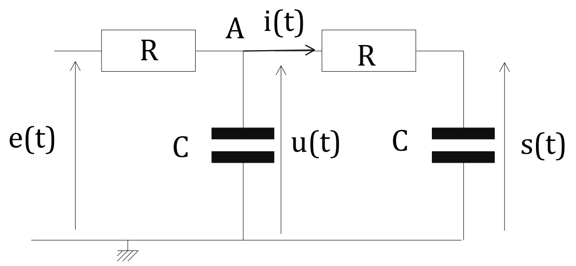
L'harmonique 3 à 1000Hz passe entièrement, mais les autres harmoniques sont fortements atténuées et on ne les verra probablement pas.

6)Ici , on devrait sélectionner l'harmonique 2, mais elle est nulle, donc il y aura seulement du bruit en sortie.

Exercice C.

1)Cf cours de sup.

2)



Si on a bien ici <u>S</u>=<u>H</u>$_1$.<u>U</u>, on n'a pas <u>U</u>=<u>H</u>$_1$.<u>E</u> car le courant de sortie du premier étage i(t) n'est pas nul.

3)$\underline{H} = \frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$ dont le module vaut $H = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} \leq 1 = H(0)$

a)Donc H_{max}=1.

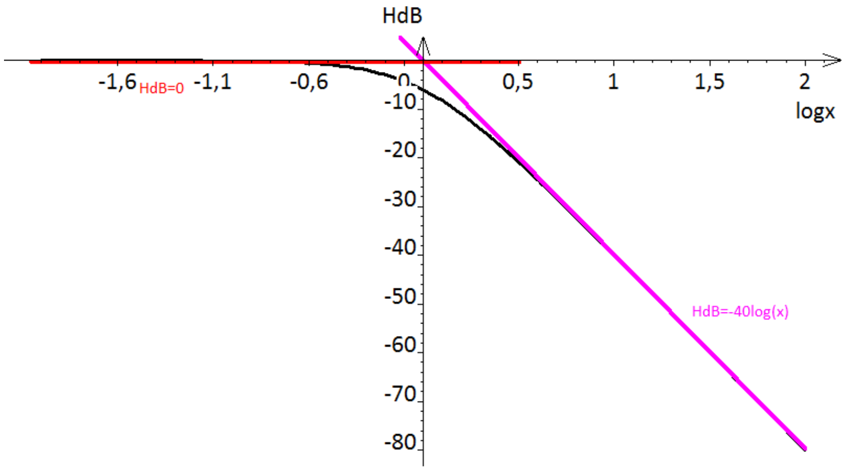
b)La résolution de $H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ donne $\omega_c = \omega_o\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

c)En option, le tracé du diagramme de Bode :

$H(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Pour x<<1, H(x)≈1 donc H_{dB}≈0 droite horizontale.

Pour x>>1, H(x)≈1/x² donc H_{dB}=20log(H(x)) ≈-40log(x) droite de pente -40 passant pas le point (0,0). H_{dB} en fonction de log(x) donne sur un intervalle de quatre décades, avec les deux asymptotes :



Exercice D. Pour m<<1, $H_{max} = \frac{1}{2m} >> 1$ et donc H_{dBmax}≈-20log(2m).

Exercice F.

1)$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ après calcul.

2)La bande *coupée* (et non pas passante) sera l'intervalle de pulsations pour lequel H<H_{max}. Il faut donc calculer H_{max}. On calcule alors $H = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} \leq 1 = H(0)$ donc H_{max}=1.

Les pulsations de coupure vérifient $H = H_{max}/\sqrt{2}$ soit x solution de :

$$Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 1 \qquad \text{relation } (\alpha)$$

<u>Si on veut faire le calcul complet</u>, la résolution fait apparaître deux polynômes de degré 2, qui ont quatre solutions réelles dont deux seulement sont positives et qu'on notera x_1 et x_2.

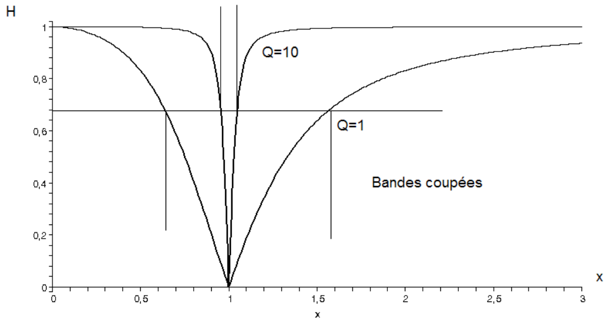
On calcule $x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$

La bande coupée vaut $\Delta x = x_2 - x_1 = 1/Q$, soit encore $\Delta\omega = \omega_o/Q$.

<u>Mais on peut être futé.</u> Admettons qu'il y ait deux solutions réelles positives. Soit x_1 une des solutions, alors $x_2 = 1/x_1$ est aussi solution. La bande coupée est :

$|x_1-x_2|=|x_1-1/x_1|=1/Q$ d'après la relation (α).

Si Q<<1 Δx>>1 bande coupée large Si Q>>1 Δx>>1 bande coupée étroite
Pour une bonne filtration, il faut une bande coupée étroite, donc Q>>1.



3)50Hz est la fréquence du secteur. Par effet d'antenne, on peut retrouver du 50Hz dans un signal. On s'efforce généralement de bien blinder l'alimentation. Voir GBF. Pour éliminer une composante 50Hz éventuelle, il suffit d'utiliser le filtre précédent avec la fréquence d'anti-résonance réglée à 50Hz.
Soit $\omega_o \approx 314$ s^{-1}. Avec les contraintes imposées, on calcule L≈150H (??) et C≈68nF (OK).

4)a)s(0+)=E et (ds/dt)(0+)=-RE/L=-ω_oE/Q.

Soit i le courant sortant du générateur. Pour les trois dipôles, je définis de façon évidente u_R, u_L et u_C en convention récepteur.
On a les relations suivantes valables pour t>0 :

$$u_R = Ri \qquad u_L = L\frac{di}{dt} \qquad i = C\frac{du_C}{dt} \qquad E = u_R + u_C + u_L = u_R + s \qquad s = u_L + u_C$$

Continuité du courant dans la bobine : i(0)=0 donc u_R(0)=0
Continuité de la tension aux bornes de C : u_C(0)=0.

Eq4 donne alors pour t=0$^+$, $s(0^+) = u_L(0^+) = L\frac{di}{dt}(0^+) = E$
Dérivons eq4 par rapport au temps pour t>0 : $0 = \dot{u}_R + \dot{s} = R\frac{di}{dt} + \dot{s}$ et on fait tendre t vers 0$^+$.

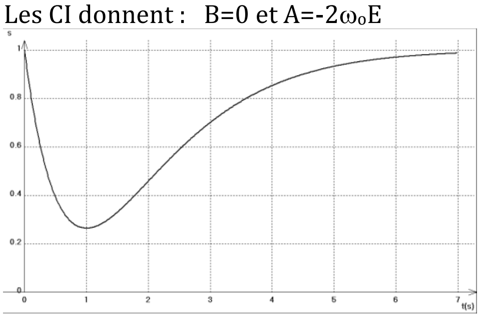
b)$\ddot{s} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{s} + \omega_o^2 s = \omega_o^2 E$.

A partir de la fonction de transfert, il faut relier $\underline{S}$ à $\underline{E}$, et multiplier le nombre de fois nécessaire par jω pour n'avoir ce terme qu'au numérateur. Multiplier une grandeur complexe par jω revient à dériver la grandeur réelle correspondante par rapport au temps.

c)La solution de l'équation précédente est la somme d'une solution particulière (ici E par exemple) et de la solution générale sans second membre. Le cas du régime critique correspond à Q=1/2.

La solution s'écrit alors $s(t) = E + (At + B)\,exp(-\omega_o t)$

Les CI donnent : B=0 et A=-2ω_oE d'où $s(t) = E.(1 - 2\omega_o t)\,exp(-\omega_o t)$



exemple avec E=1V et ω_o=1s^{-1}.

Le filtre est un coupe bande donc laisse passer les HF (début du régime transitoire) et les BF (régime permanent).

Exercice G.

1) $H(x) \leq 1 = H(0)$

Le gain maximal est 1 ; obtenu en BF.
On peut vérifier que ω_0 est la pulsation de coupure à -3dB.

2)Calculer tout simplement la norme du complexe. Aucun pb.

3)On fait le produit en croix et on obtient :

$$\underline{S} + 2(jx)\underline{S} + 2(jx)^2\underline{S} + (jx)^3\underline{S} = \underline{E}$$

On multiplie par ω_o^3 et on passe en réel , on obtient :

$$\dddot{s} + 2\omega_o\ddot{s} + 2\omega_o^2\dot{s} + \omega_o^3 s = \omega_o^3 e$$

On obtient une équation différentielle compatible avec le titre de l'exercice, ordre 3.

Exercice H. Filtre coupe-bande,.

Je mets la masse à 0. A partir de maintenant, les tensions par rapport à la masse sont aussi les potentiels électriques.
Potentiel e à l'entrée, s à la sortie.
Nœud A en haut entre les deux condensateurs : potentiel u.
Nœud B en bas entre les deux résistances : potentiel v.

Je vais maintenant utiliser la LDN en termes de potentiel sur le nœud A, le nœud B et la sortie.
On peut utiliser le nœud de sortie car , pour le calcul d'une fonction de transfert, le quadripole est à vide donc le courant de sortie est nul. On ne peut pas utiliser le nœud à l'entrée car le courant d'entrée (non nul) peut juste être défini donc cela donnerait une équation supplémentaire avec une varible de plus. Sans intérêt sinon de calculer le courant d'entrée ;

Nœud A : 3 branches

$$jC\omega(\underline{e} - \underline{u}) + jC\omega(\underline{s} - \underline{u}) + \frac{2}{R}(0 - \underline{u}) = 0$$

En faisant apparaître X, on obtient :

$$jX(\underline{e} + \underline{s}) = (2 + 2jX)\underline{u} \qquad (a)$$

Nœud B : 3 branches

$$\frac{1}{R}(\underline{e} - \underline{v}) + \frac{1}{R}(\underline{s} - \underline{v}) + j2C\omega(0 - \underline{v}) = 0$$

En faisant apparaître X, on obtient :

$$\underline{e} + \underline{s} = (2 + 2jX)\underline{v} \qquad (b)$$

Sortie : 2 branches car le courant de sortie est nul.

$$\frac{1}{R}(v - s) + jC\omega(u - s) = 0$$

En faisant apparaître X, on obtient :

$$jX\underline{u} + \underline{v} = (1 + jX)\underline{s} \qquad (c)$$

La relation (a) donne :

$$\underline{u} = \frac{jX}{(2 + 2jX)}(\underline{e} + \underline{s})$$

La relation (b) donne :

$$\underline{v} = \frac{1}{(2 + 2jX)}(\underline{e} + \underline{s})$$

Et on reporte dans la dernière relation :

$$jX\frac{jX}{(2 + 2jX)}(\underline{e} + \underline{s}) + \frac{1}{(2 + 2jX)}(\underline{e} + \underline{s}) = (1 + jX)\underline{s}$$

Soit encore :

$$(1 - X^2)(\underline{e} + \underline{s}) = 2(1 + jX)^2\underline{s}$$

$$(1 - X^2)\underline{e} = \{2(1 + jX)^2 - 1 + X^2\}\underline{s}$$

$$(1 - X^2)\underline{e} = \{1 - X^2 + 4jX\}\underline{s}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 - X^2}{1 - X^2 + 4jX} = \frac{1}{1 + \frac{4jX}{1 - X^2}}$$

Exercice I.

0)On a $\underline{E}$=E et $\underline{S}$=Sexp(jφ).

1)$\omega_o=10^4$ s^{-1} et $f_o\approx1600$ Hz. A cette pulsation, $L\omega_o=1/(C\omega_o)=1000\Omega$.

2)Les deux dipôles L et C sont en parallèles donc les admittances s'ajoutent. On calcule :

$\underline{Y} = j(C\omega - \frac{1}{L\omega})$ puis $\underline{Z} = \frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}$.

On calcule alors que $\underline{Y}(\omega_o)=0$ ce qui correspond à une impédance infinie, soit donc un interrupteur ouvert.

3)Par un PDT, on obtient : $\underline{S} = \frac{\underline{Z}}{R+\underline{Z}}E = \frac{1}{1+R\underline{Y}}E$. On obtient la formule proposée avec $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 10^4$.

On obtient alors :

$$\ddot{s}(t) + \frac{\omega_o}{Q}\dot{s}(t) + \omega_o^2 s(t) = \frac{\omega_o}{Q}\dot{e}(t)$$

4)Filtre passe-bande, compatible avec les modèles équivalents HF et BF de L et de C. ω_o est la pulsation de résonance et $\Delta f=f_o/Q\approx0{,}16$Hz est la bande passante à -3dB.

5)$\underline{H}(\omega_o)=1$. On aura alors s(t)=e(t).

6)On a $\underline{S}=S.e^{j\varphi}=\underline{H}E$ donc $S=|\underline{H}|.E=HE$ et $\varphi=\arg(\underline{S})=\arg(\underline{H})$

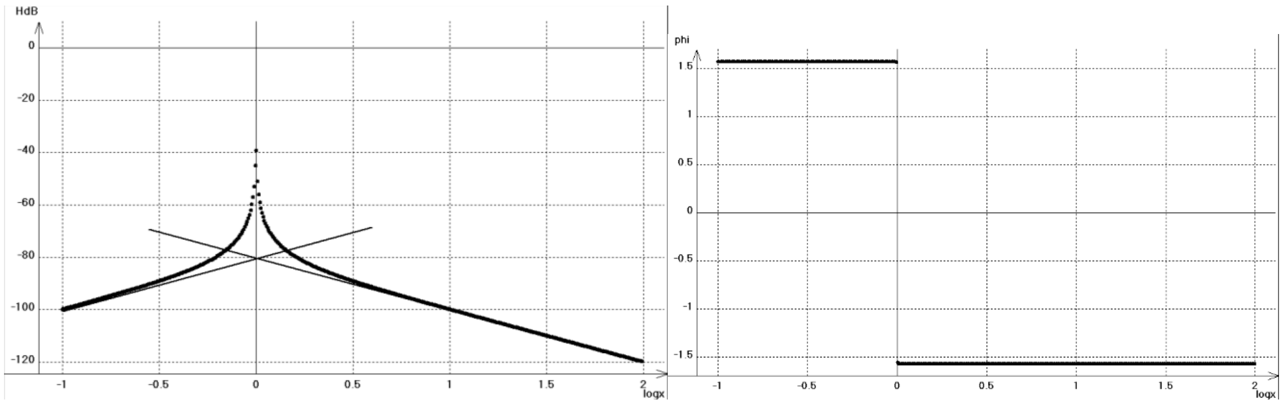
s(t)=HE.cos(ωt+arg($\underline{H}$))

7)Avec une telle valeur de Q, on va avoir un comportement très violent au voisinage de la pulsation de résonance. On pose $x=\omega/\omega_o$.

En BF , x<<1, $\underline{H}\approx jx/Q$ soit $\varphi\approx+\pi/2$ et $H_{dB}\approx20\log(x/Q)=20\log(x)-80$

En HF , x>>1, $\underline{H}\approx-j/(Qx)$ soit $\varphi\approx-\pi/2$ et $H_{dB}\approx-20\log(xQ)=-20\log(x)-80$

On dessine le diagramme de Bode suivant



8)On a alors $\underline{S}(\omega_o)$=E, donc s(t)=e(t), les deux signaux sont égaux donc en phase.

Méthode 1: On cherche la pulsation pour laquelle les deux signaux sont confondus.

Méthode 2 : en mode XY : e(t) sur la voie 1, s(t) sur la voie 2. A la pulsation ω_o, l'ellipse se transforme en droite. Cette méthode est beaucoup plus précise.

9)On reprend la question 3 où on réécrit l'admittance $\underline{Y}$ à la pulsation ω_o :

$\underline{Y} = \frac{1}{r+jL\omega_o} + jC\omega_o = \frac{jrC\omega_o}{r+jL\omega_o} \approx \frac{rC}{L}$ car $r=5\Omega <+< L\omega_o=1000\Omega$

On obtient alors le résultat demandé. On trouve alors $\underline{H}(\omega_o)\approx0{,}2$ réel positif. Les signaux de sortie et d'entrée restent en phase. Pour la détection expérimentale de ω_o, la méthode 2 marche encore, ce qui n'est pas le cas de la méthode 1.

D'autre part, on peut s'attendre à obtenir un facteur Q plus faible que le théorique, ce qui conduit à un filtre passe-bande moins sélectif.