L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet se compose d'un problème sur les séries dont les différentes parties sont indépendantes entre elles.

Problème

(Inspiré de E3A MP 1999 maths 3)

Pour ce problème, on rappelle l'énoncé du Critère Spécial des Séries Alternées (CSSA) :

si (a_n) est une suite positive, décroissante et qui tend vers 0 alors

- *la série* $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ *est convergente*
- *le reste de cette série* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k$ *est du même signe que son premier terme* $(-1)^{n+1}a_{n+1}$ *et vérifie* $|R_n| \leqslant |a_{n+1}|$.

Partie I : Autour de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n\theta)}{n}$

Dans cette partie, θ désigne un réel fixé de $[0, 2\pi[$

1. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n\theta)}{n}$ pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$?

2. On pose, pour $n \geqslant 1$, $C_n = \sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)$ et $C_0 = 0$.

a) Déterminer, pour $n \geqslant 1$, une expression de C_n n'utilisant pas le symbole $\sum$.

b) En déduire que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour $\theta \in]0, 2\pi[$.

c) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} C_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ est absolument convergente pour $\theta \in]0, 2\pi[$.

d) Prouver, pour $n \geqslant 1$ l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(k\theta)}{k} = \frac{C_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

et en déduire la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n\theta)}{n}$ pour $\theta \in]0, 2\pi[$.

3. Pour $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Justifier qu'il existe une constante γ (que l'on n'explicitera pas) telle que

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

4. Dans cette question, on suppose que $\theta = \pi$

a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n$

b) En déduire une expression de $\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}$ en fonction de H_{2n} et H_n.

c) Prouver $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

5. Dans cette question, on suppose que $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

a) Préciser la valeur de $\cos(n\theta)$ dans les trois cas $n = 3k$, $n = 3k+1$ et $n = 3k+2$ (avec $k \in \mathbb{N}$)

b) En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{3n} \frac{\cos(k\theta)}{k}$ en fonction de certains termes de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$.

c) Déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$

6. Dans cette question, on souhaite sommer les termes de la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ dans un autre ordre. Pour cela, on pose, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et

$$b_n = a_{4n} + a_{4n-2} + a_{2n-1}$$

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{2}(H_n - H_{2n})$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ et comparer cette valeur à celle obtenue à la question **I.4.c**.

7. Étude de l'absolue convergence : on souhaite démontrer par l'absurde que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ n'est pas absolument convergente.

Pour cela, on fixe $\theta \in [0, 2\pi[$ et on suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ est absolument convergente.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos^2(n\theta)}{n}$ est elle aussi absolument convergente.

b) Conclure en linéarisant $\cos^2(x)$.

Partie II : Étude de $R_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$, $n \in \mathbb{N}$

1. a) Soient $n \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant n+1$ et $t \in [0, 1]$; calculer $\displaystyle\sum_{k=n}^{N-1} (-1)^{k+1} t^k$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^k \,\mathrm{d}t$ et justifier que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{1+t} \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k+1}$, puis en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \,\mathrm{d}x$$

2. a) Par intégration par parties, montrer qu'il existe un entier $\beta \in \mathbb{N}^*$ et un réel k différent de 0 tels que :

$$R_n = k\frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)$$

b) En déduire la nature de la série de terme général R_n.

3. Exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} R_n$ à l'aide d'une intégrale et déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Partie III : Étude de $r_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$, $n \in \mathbb{N}$

1. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ et $v_n = U_n - 2\sqrt{n}$

a) En s'intéressant à une série, montrer que la suite (v_n) converge.

Dans la suite, on notera L le réel défini par $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.

b) Justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^{5/2}}$ et démontrer que

$$\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^{5/2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3n^{3/2}}$$

2. a) À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)(t-k)}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \frac{8}{3}\left(2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}\right)$$

b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\left| v_{k+1} - v_k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right| \leqslant \frac{C}{k^{5/2}}$$

c) En considérant $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \left(v_{k+1} - v_k\right)$, dont vous justifierez l'existence, montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$U_n = \alpha\sqrt{n} + \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

3. a) Montrer qu'il existe un réel S tel que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S$

b) Exprimer r_{2n} en fonction de S et des sommes partielles U_n et U_{2n}.

c) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que :

$$r_{2n} = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

d) Exprimer S en fonction de L et déterminer la nature de la série de terme général r_n.

Partie IV : Étude de $t_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p)$, $n \in \mathbb{N}$

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, décroissante, tendant vers 0 en $+\infty$ et telle que f' soit croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. a) Donner un exemple d'une telle fonction f.

b) Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, t_n existe.

2. Montrer que

$$2t_n - (-1)^{n+1} f(n+1) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \left[f(p) - f(p+1)\right]$$

et en déduire que la série $\sum t_n$ est convergente.

3. On suppose dans cette question que $f(p)$ et $f(p+1)$ sont équivalents quand p tend vers $+\infty$. Déterminer un équivalent de t_n quand n tend vers $+\infty$.