(d'après E4A PSI 2003 maths B)

Dans tout l'exercice, (a_n) est une suite d'éléments non nuls de $\mathbb{R}$. On lui associe la suite (p_n) définie par $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.
Lorsque (p_n) converge, on note p sa limite.
Lorsque (p_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), on dit que (p_n) admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$) pour limite.

Première partie

1. Donner un exemple de suite (a_n), telle que (p_n) converge vers $p = 0$.

2. Prouver que, si (p_n) converge vers p différent de 0, alors (a_n) converge vers 1.

3. On suppose dans cette question qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$a_n > 0, \text{ pour } n > n_0.$$

On pose, pour n supérieur à n_0, $q_n = \prod_{k=n_0+1}^{n} a_k$.

a) Pour n supérieur à n_0, exprimer q_n en fontion de p_n et de p_{n_0}.

b) Montrer que, si la série $\sum \ln(a_n)$ converge, alors la suite (p_n) converge et que p est non nul.

c) On suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser dans chacun de ces deux cas la limite de la suite (p_n).

Dans ce qui suit, on définit u_n par : $a_n = 1 + u_n$.

4. On suppose dans cette question que, pour tout n, on a $u_n \geqslant 0$.
Démontrer que la suite (p_n) converge vers $p > 0$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

5. On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge.

a) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

b) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ diverge, alors la suite (p_n) converge et $p = 0$.

6. Prouver que, si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

Deuxième partie

Les quatre questions qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre. On pourra les traiter en utilisant les résultats établis dans la première partie, à condition de s'y référer de manière très précise.

1. Etudier la convergence et déterminer la limite de (p_n) dans les deux cas suivants :

a) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

b) $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

2. a) Justifier qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $a_n = K \sum_{k=1}^{n} e^{-k^2}$ tende vers 1.

La constante K est ainsi fixée pour la suite.

b) La suite (p_n) est-elle convergente ? On pourra utiliser $e^{-k^2} \leqslant e^{-k}$ pour $k \geqslant 1$.

3. Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $1 + u_n \neq 0$ pour $n \geqslant 1$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k) \ , \ v_n = \frac{u_n}{p_n}.$$

a) Pour $n \geqslant 1$, exprimer v_n en fonction de $\dfrac{1}{p_n}$ et de $\dfrac{1}{p_{n-1}}$.

b) On suppose dans cette question que la série $\sum u_n^2$ converge.

i. Etablir que la convergence de la série $\sum u_n$ implique la convergence de la série $\sum v_n$.

ii. La convergence de la série $\sum v_n$ implique-t-elle la convergence de la série $\sum u_n$? Justifier.

c) Déterminer une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge.

4. Soit α un réel strictement positif, et $a_n = 1 + \sin\left(\frac{c}{n^\alpha}\right)$ où c est un nombre réel tel que pour tout n, a_n soit non nul.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et c pour que (p_n) converge vers 0.

b) On suppose que : $\alpha = 1$.
Etudier la convergence de la série $\sum p_n$. On pourra utiliser la convergence vers un réel noté γ de la suite (t_n), où $t_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.