Correction du DM1

Extrait de E4A PSI 2003 maths B

Première partie : On peut commencer par remarquer que par hypothèse, on a $a_n \neq 0$ donc $p_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si (a_n) est constante (p_n) est géométrique donc pour $a_n = q \in]0,1[$, on a $p_n = q^n$ et $p = 0$.

2. Si (p_n) converge vers $p \neq 0$ alors $a_n = \dfrac{p_n}{p_{n-1}}$ (pour $n \geqslant 1$) ; on en déduit $\boxed{\lim a_n = 1}$

3. a) $\boxed{q_n = \dfrac{p_n}{p_{n_0}}}$

b) Si $l = \displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \ln(a_n)$ alors par continuité d'exponentielle, on a $\lim q_n = \exp\left[\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0+1}^{n} \ln(a_k)\right] = e^l > 0$ donc $\boxed{p = p_{n_0} e^l \neq 0}$

c) De même, si $\lim \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = -\infty$ alors $\lim q_n = 0$ donc $\boxed{p = 0}$

Par contre si $\lim \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = +\infty$ alors $\lim q_n = +\infty$ et $\boxed{p = \begin{cases} +\infty & \text{si } p_{n_0} > 0 \\ -\infty & \text{si } p_{n_0} < 0 \end{cases}}$

4. Si (p_n) converge vers $p > 0$ alors $\lim a_n = 1$ donc $\lim u_n = 0$ et $(\ln(p_n))$ converge ; de plus $\ln(p_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + u_k)$ est la somme partielle d'une série à termes positifs. Comme $\lim u_n = 0$, on a $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, positif, donc par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

Réciproquement, si $\sum u_n$ converge alors $\lim u_n = 0$ donc $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ (positif) donc $\sum \ln(1 + u_n)$ converge donc (p_n) converge vers $p > 0$.

5. a) On a $\lim u_n = 0$ donc $\ln(1 + u_n) = u_n + O\left(u_n^2\right)$. Si $\sum u_n^2$ converge alors $\sum (\ln(1 + u_n) - u_n)$ est absolument convergente puis $\sum \ln(1 + u_n)$ converge donc $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p > 0}$

b) On a encore $\lim u_n = 0$ et $\ln(1 + u_n) - u_n \sim \dfrac{-1}{2} u_n^2$ est négatif. Si $\sum u_n^2$ diverge alors $\lim \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = +\infty$ donc, comme $\sum u_n$ converge, on a $\lim \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + u_k) = -\infty$ et $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } 0}$

6. On a $\lim u_n = 0$ donc $|\ln(1 + u_n)| \sim |u_n|$ (positif) et $\sum \ln(1 + u_n)$ est absolument convergente. On en déduit que $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p > 0}$

Deuxième partie :

1. a) $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc $\boxed{(p_n) \text{ diverge vers } +\infty}$ d'après **I.4.** (on a bien $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$) et car (p_n) est croissante.

b) $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ est alternée ; $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et si on pose $\varphi(t) = \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$, on a, pour $t > 0$, $\varphi'(t) = \dfrac{2 - \ln t}{2t\sqrt{t}} \leqslant 0$ pour $t \geqslant e^2$ donc $\left(\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante à partir d'un certain rang. On en déduit (CSSA) que $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ converge alors que $\sum \dfrac{(\ln n)^2}{n}$ diverge (car $\dfrac{(\ln n)^2}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$) donc, d'après **I.5.b**, $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } 0}$

2. a) On a $e^{-n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum e^{-n^2}$ est absolument convergente. De plus $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2} \geqslant e^{-1} > 0$; il suffit donc de poser $\boxed{K = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2}\right)^{-1}}$ pour que (a_n) tende vers 1.

b) On a $u_n = a_n - 1 = K\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k^2}\right) = -K \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^2}$; comme $e^{-k^2} \leqslant e^{-k}$ pour $k \geqslant 1$ et comme $\sum e^{-k}$ converge ($|e^{-1}| < 1$), on a $|u_n| \leqslant K \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k} = \dfrac{Ke^{-n+1}}{1 - e^{-1}}$. On a donc $u_n = O\left(e^{-n}\right)$ donc $\sum u_n$ est absolument convergente et $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p \neq 0}$ d'après **I.6**.

3. a) $1+u_n = \dfrac{p_n}{p_{n-1}}$ donc $\boxed{u_n = \dfrac{1}{p_{n-1}} - \dfrac{1}{p_n}}$

b) i. D'après **I.5.a**, si $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ converge, (p_n) converge vers $p > 0$ donc $\left(\dfrac{1}{p_n}\right)$ converge et comme $v_n = \dfrac{1}{p_{n-1}} - \dfrac{1}{p_n}$, on a $\boxed{\sum v_n \text{ converge}}$

ii. Si $u_n = \dfrac{1}{n}$, on a vu que (p_n) tend vers $+\infty$ donc $\left(\dfrac{1}{p_n}\right)$ converge vers 0 donc $\sum v_n$ converge alors que $\sum u_n$ diverge.

c) D'après **II.1.a**, si $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$, on a $\sum u_n$ converge et (p_n) tend vers 0 donc $\left(\dfrac{1}{p_n}\right)$ diverge et donc $\sum v_n$ diverge.

4. a) Comme $\alpha > 0$ on a $\sin\left(\dfrac{c}{n^\alpha}\right) \sim \dfrac{c}{n^\alpha}$ et $a_n > 0$ à partir d'un certain rang. De plus $\ln(a_n) \sim \sin \dfrac{c}{n^\alpha} \sim \dfrac{c}{n^\alpha}$ est de signe fixe (pour n grand) donc on peut utliser **I.3** : $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } 0 \text{ si et seulement si } \alpha \leqslant 1 \text{ et } c < 0}$

b) Si $c \geqslant 0$, (p_n) ne tend pas vers 0 donc $\sum p_n$ diverge.

Si $c < 0$, on a $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} = 1 + \sin \dfrac{c}{n} = 1 + \dfrac{c}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, puis $\ln(p_n) - \ln(p_{n-1}) = \dfrac{c}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; la série $\sum \left[\ln(p_n) - \ln(p_{n-1}) - \dfrac{c}{n}\right]$ est donc absolument convergente. On a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[\ln(p_k) - \ln(p_{k-1}) - \frac{c}{k}\right] = \delta + o(1)$ (où δ est la somme de la série précédente). On en déduit $\ln(p_n) - \ln(p_0) - cH_n = \delta + o(1)$ puis, avec l'indication du texte, $\ln(p_n) = \delta + \ln(p_0) + c(\ln n + \gamma) + o(1)$ donc la suite $(\ln(p_n) - c\ln(n))$ converge vers une limite $l = \delta + \ln(p_0) + c\gamma$. On en déduit $\lim \dfrac{p_n}{n^c} = e^l \neq 0$, ce qui signifie que $p_n \sim \dfrac{e^l}{n^{-c}}$ (positif) et enfin $\boxed{\sum p_n \text{ converge si et seulement si } c < -1}$