Partie I : Étude d'endomorphismes tels que $u \circ u = 0$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E non nul tel que $u \circ u = 0$. On note r le rang de u et p la dimension de $\ker u$.

1. a) Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \ker u$.

b) En déduire que $r \leqslant \dfrac{n}{2}$ et $p \geqslant \dfrac{n}{2}$.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

a) Justifier que $\operatorname{Im} u = \ker u$.

b) Soit i un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$ et j un vecteur tel que $i = u(j)$. Montrer que (i, j) est une base de E.

c) Quelle est la matrice de u dans la base (i, j) ?

3. Dans cette question, on suppose que $n = 3$.

a) Montrer que $r = 1$. Quelle est la dimension de $\ker u$?

b) Soit k un vecteur de E n'appartenant pas à $\ker u$ et $i = u(k)$. Justifier l'existence d'un vecteur j de $\ker u$ non colinéaire à i. Montrer qu'alors (i, j, k) est une base de E.

c) Déterminer la matrice de u dans la base (i, j, k).

4. Étude du cas général

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Réciproquement, vérifier que s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $r \leqslant \dfrac{n}{2}$ alors $u \circ u = 0$.

Partie II : Application à un exemple

Dans cette partie, on désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et J la matrice définie par $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est J.

a) Vérifier que $v \circ v = 0$.

b) Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Im} v$ et $\ker v$.

c) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de v est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.

2. On considère l'ensemble Δ des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $M = I + mJ$ $(m \in \mathbb{R})$.

a) Montrer que Δ est stable pour la multiplication matricielle.

b) Δ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

3. Soit $M = I + mJ$, où m est un réel non nul. On se propose dans cette question de trouver toutes les matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation (1) : $X^2 = M$.

a) Quelles sont les solutions de (1) appartenant à Δ ?

b) Justifier l'égalité $P^{-1}MP = N$, N désignant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Montrer qu'en posant $Y = P^{-1}XP$, l'équation (1) équivaut à l'équation (2) : $Y^2 = N$.

d) Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solution de (2). Montrer que $YN = NY$. En déduire que Y est triangulaire supérieure et que $i = a$.

e) Résoudre l'équation (2). On vérifiera qu'il y a une infinité de solutions dont on précisera la forme.

f) Exprimer alors les solution de (1) à l'aide de la matrice P (aucun calcul n'est demandé).