Correction du DM2

Partie I :

1. a) Si $y \in \mathrm{Im}(u)$ alors $y = u(x)$ pour $x \in E$. Ainsi, $u(y) = u \circ u(x) = 0$ donc $y \in \ker(u)$ et $\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)}$

b) On en déduit que $r \leqslant p$ et, d'après la formule du rang, on a $p + r = n$ donc $\boxed{r \leqslant \frac{n}{2} \text{ et } p \geqslant \frac{n}{2}}$

2. a) On a $r \neq 0$ car $u \neq 0$ et $r \leqslant 1$ (d'après **1.**) donc $r = 1$ puis $p = 1$ d'après la formule du rang. Comme $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ et $\dim \mathrm{Im}(u) = \dim \ker(u)$, on a $\boxed{\mathrm{Im}(u) = \ker(u)}$

b) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha i + \beta j = 0$. Alors $\alpha u(j) + \beta j = 0$ puis (en composant par u) $\alpha u^2(j) + \beta u(j) = 0$ donc $\beta i = 0$ car $u^2 = 0$. Comme $i \neq 0$, on a $\beta = 0$. En revenant à l'équation initiale $\alpha i + \beta j = 0$, on obtient $\alpha i = 0$ puis $\alpha = 0$. Donc (i, j) est une famille libre de deux vecteurs et $\dim(E) = 2$ donc $\boxed{(i, j) \text{ est une base de } E}$

c) $u(i) = 0$ car $i \in \mathrm{Im}(u) = \ker(u)$ et $u(j) = i$ donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{(i,j)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

3. a) On a $r \leqslant \frac{3}{2}$ et $r \neq 0$ donc $\boxed{r = 1}$ puis $\boxed{p = 2}$

b) $k \notin \ker(u)$ donc i est un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u)$, donc un vecteur libre de $\ker(u)$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre de $\ker(u)$ en une base de $\ker(u)$. Comme $\dim \ker(u) = 2$, il existe un vecteur j non colinéaire à i tel que (i, j) forme une base de $\ker(u)$.
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in K^3$ tel que $\alpha i + \beta j + \gamma k = 0$. Alors on a $\alpha u(i) + \beta u(j) + \gamma u(k) = 0$, c'est-à-dire $\gamma i = 0$; comme $i \neq 0$, on a $\gamma = 0$. Ainsi $\alpha i + \beta j = 0$ et comme (i, j) est une base de $\ker(u)$, on en déduit $\alpha = \beta = 0$ donc (i, j, k) est une famille libre. Enfin, comme $\dim(E) = 3$, $\boxed{(i, j, k) \text{ est une base de } E}$

c) $u(i) = 0$, $u(j) = 0$ et $u(k) = i$ donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{(i,j,k)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

4. a) Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$, avec $r = \mathrm{rg}(u)$. Il existe des vecteurs $(e_{n-r+1}, \ldots, e_n)$ tels que $u(e_i) = e_{i+r-n}$ pour $i \in [\![n - r + 1, n]\!]$ (comme $r \leqslant n/2$, $r < n - r + 1$). Comme $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$, $(e_1, \ldots, e_r)$ est une famille libre de $\ker(u)$, que l'on peut donc compléter en une base de $\ker(u)$: $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{n-r})$. On vérifie alors que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E : si $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$, en composant par u, on obtient $\alpha_{n-r+1} e_1 + \cdots + \alpha_n e_r = 0$ ce qui donne $\alpha_{n-r+1} = \cdots = \alpha_n = 0$ puisque $(e_1, \ldots, e_r)$ est une famille libre ; il reste alors $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{n-r} e_{n-r} = 0$ qui donnera $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-r} = 0$ puisque $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ est une base de $\ker(u)$. Par construction de la base $(e_1, \ldots, e_n)$, la matrice de u dans cette base est bien celle demandée.

b) *On ne peut pas vérifier que $u^2 = 0$ par un calcul matriciel par blocs à partir de la matrice donnée car les blocs n'ont pas la bonne taille pour effectuer ce calcul (sauf si $r = n/2$).*
En appelant e_i les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, en lisant la matrice, on a $\ker(u) = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_{n-r}\}$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_r\}$; comme $r \leqslant n/2$, on a $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ donc $\boxed{u^2 = 0}$

Partie II :

1. a) $\boxed{J^2 = 0}$

b) $C_1 = -C_2 = -C_3 \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(J) = 1$ et $\boxed{(1, 2, -1) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(v)}$ $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ sont deux vecteurs libres de $\ker(v)$ et $\dim \ker(v) = 2$ donc $\boxed{(1, 1, 0) \text{ et } (1, 0, 1) \text{ forment une base de } \ker(v)}$

c) D'après **I.3.c**, il suffit de prendre $\mathcal{B} = (i, j, k)$ avec $\boxed{k = (1, 0, 0),\ i = v(k) = (-1, -2, 1) \text{ et } j = (1, 1, 0)}$ (qui est dans $\ker(v)$ et non colinéaire à i)

2. a) $(I + mJ)(I + m'J) = I + (m + m')J$ car $J^2 = 0$ donc $\boxed{\Delta \text{ est stable par produit}}$

b) I et J sont libres donc $0 \notin \Delta$ donc $\boxed{\Delta \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

3. a) Si $X = I + \alpha J$, on a $X^2 = I + 2\alpha J$ donc $X^2 = M$ si et seulement si $2\alpha = m$. L'équation $X^2 = M$ possède donc une unique solution dans Δ : $\boxed{X = I + \frac{m}{2} J}$

b) On a $P^{-1} J P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $Y^2 = P^{-1} X^2 P$ donc $\boxed{Y^2 = N} \Leftrightarrow P^{-1} X^2 P = P^{-1} M P \boxed{\Leftrightarrow X^2 = M}$

d) $YN = Y^3 = NY$. De plus, $YN = \begin{pmatrix} a & b & c+ma \\ d & e & f+md \\ g & h & i+mg \end{pmatrix}$ et $NY = \begin{pmatrix} a+mg & b+mh & c+mi \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

donc $YN = NY \Leftrightarrow (mg = mh = md = 0$ et $ma = mi$ donc comme $m \neq 0$, on a $g = h = d = 0$ et $a = i$ ce qui implique que $\boxed{Y \text{ est triangulaire supérieure et } a = i}$

e) Si $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ alors $Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+e) & 2ac+bf \\ 0 & e^2 & f(a+e) \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ donc $Y^2 = M \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = e^2 = 1 \\ b(a+e) = f(a+e) = 0 \\ 2ac + bf = m \end{cases}$

Si $a + e = 0$ alors $\boxed{Y = \begin{pmatrix} 1 & b & \frac{1}{2}(m-bf) \\ 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } Y = \begin{pmatrix} -1 & b & \frac{1}{2}(bf-m) \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ avec } (b, f) \in \mathbb{R}^2}$

Si $a + e \neq 0$ alors $b = f = 0$ et $\boxed{Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{m}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{m}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

f) $X = PYP^{-1}$ avec Y une des matrices précédentes.