I Primitives et intégration sur un segment

Exercice 1 (Centrale PSI 2014) [Solution]

Soit f continue sur $[0, 1]$

1. On suppose que $\int_0^1 f(t) dt = 0$; montrer que f s'annule sur $]0, 1[$.
2. On suppose $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$; montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+2k} \sqrt{\frac{k}{2n+k}}$; déterminer la limite de la suite (u_n) .

On donne $\frac{4y^2}{(1-y^2)(1+3y^2)} = \frac{1}{1-y^2} - \frac{1}{1+3y^2}$
indication : c'est une somme de Riemann

Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2} dt - \int_x^1 e^{-nt^2} dt$.

1. Montrer que f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et étudier ses variations.
2. Montrer qu'il existe un unique $c_n \in [0, 1]$ tel que $\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt$.
 Déterminer c_0 .
3. Étudier la suite $(c_n)_{n \geq 0}$.
indication : étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ et en déduire que (c_n) converge vers l . On peut ensuite remarquer que $\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt \geq c_n$ pour trouver $l = 0$.

Exercice 4 (ENSAM PT 2007) [Solution]

Montrer que $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln t}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$; donner les variations de f .

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t} \right) dt = 0$, en déduire que f admet une limite finie en $+\infty$ que l'on précisera.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et dérivable à droite en 0. Donner l'allure du graphe de f .

Exercice 5 (Mines-ponts PC 2006) [Solution]

Montrer que $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ est définie sur $]0, 1[$. Donner ses limites en 0 et 1. Calculer $\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t} dt$.

questions subsidiaires : étudier f sur $\mathbb{R}^+$ (limite en $+\infty$, variations, DL₃(1))

Exercice 6 (CCP PC 2014) [Solution]

Définition, parité, variations et limites de $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt$; pour les limites, commencer par justifier que $\exists \alpha > 0, \forall t \in$

$$]0, \alpha[, \left| \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t} \right| \leq t.$$

Exercice 7 (Centrale PC 2014) [Solution]

Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan t)^2}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

En déduire un équivalent de $\int_x^1 \frac{dt}{(\arctan t)^2}$ quand x tend vers 0^+ .

Exercice 8 (CCP PSI 2015) [Solution]

On pose $\phi(x) = \int_{1/x}^x e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $\phi'(x)$.
2. Étudier la parité de ϕ et son signe sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que ϕ admet une limite en $+\infty$.

4. Montrer que ϕ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 9 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

Soit $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Trouver un équivalent simple de f en 0.
2. Trouver un équivalent de $f - g$ en 0, où g est la fonction trouvée précédemment.

Exercice 10 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser f' .
2. Déterminer des équivalents de f en 0 et $+\infty$.
3. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et calculer cette intégrale.

Exercice 11 (Centrale PSI 2010) [Solution]

1. Montrer que $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}$ est définie pour $x > 0$.
2. Montrer que $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}}$.
3. Montrer que $f(x) = 2 \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{s(e^s - 1)}$ puis que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = - \int_0^{+\infty} t f'(t) dt$

Exercice 12 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \min\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\right) dt$.

1. Étudier l'existence de $f(x)$ et calculer $f(x)$.
indication : découper l'intégrale en 3 avec la relation de Chasles selon la valeur du minimum, en discutant suivant la valeur de x
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f .

II Endomorphismes et équations fonctionnelles

Exercice 13 [Solution]

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K})$. On pose, pour $f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ et $\varphi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E tel que $\|\varphi(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\varphi^n(f)$ à l'aide d'une intégrale de f et en déduire une majoration de $\|\varphi^n(f)\|_\infty$ en fonction de $\|f\|_\infty$.
indication : justifier que $\varphi^n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et calculer $(\varphi^n(f))^{(k)}(0)$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Exercice 14 (CCP PSI 2007) [Solution]

Montrer que u défini par $u(f)(x) = \int_0^x \cos(x-t)f(t) dt$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer $u(f)(0)$. Trouver les fonctions f telles que $u(f)$ soit constant.
question subsidiaire : résoudre $u(f) = \lambda f$.

Exercice 15 (ENSAM PSI 2015) [Solution]

On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .
2. Est-il injectif? surjectif?
3. Résoudre $T(f) = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 (ENTPE-EIVP PSI 2015) [Solution]

Soient g continue sur $[0, 1]$ et $G(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t|g(t) dt$.

1. Montrer que G est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et calculer G'' .
2. Montrer qu'il existe a et b tels que $f : x \mapsto G(x) + ax + b$ vérifie $f'' = g$ et $f(0) = f(1) = 0$.
3. Existe-t-il d'autres solutions ?

Exercice 17 (Centrale PSI 2018) [Solution]

Soit $E = \{g \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{C}), f(0) = f(1) = 0\}$ et $F = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$.

1. Montrer que ϕ , qui à f associe f'' est un isomorphisme de E sur F .
2. Montrer que $G(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t|g(t) dt$, avec $g \in F$, est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et calculer G'' .
3. Montrer qu'il existe $k : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\phi^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x, t), g(t) dt$ et en déduire une constante $C > 0$ telle que $\forall g \in F, \sup_{[0,1]} |\phi^{-1}(g)| \leq C \sup_{[0,1]} |g|$.

Exercice 18 (Centrale PC 2014) [Solution]

Trouver l'unique fonction f , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 2$ et $f'(x) + 5 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = 10$.

Exercice 19 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x \geq 0, x^2 f(x) = 2 \int_0^x t f(x-t) dt$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*})$
indication : changement de variable
2. Montrer que f vérifie, sur $\mathbb{R}^{+*}$, une équation différentielle d'ordre 2
3. Trouver f

Exercice 20 (CCP PC 2006) [Solution]

Pour $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\phi(f)(x) = \int_0^1 \inf(x, t) f(t) dt$. En utilisant la relation de Chasles, trouver une autre forme de $\phi(f)(x)$. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Trouver $\ker \phi$ et $\text{Im } \phi$. Prouver que $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie une équation différentielle de la forme $(\phi(f))'' = af$ avec $a < 0$.

Exercice 21 (Centrale PSI 2015) [Solution]

Soit a continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note f une solution sur $\mathbb{R}^+$ de $(E) : y'' + (1+a)y = 0$ et g définie par $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t) dt$.

1. A-t-on $\lim_{+\infty} a = 0$?
2. Montrer que $g + g'' = 0$.
3. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $|f(x)| \leq c + \int_0^x |a(t)f(t)| dt$.
4. En déduire que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^+$ sont bornées.

Exercice 22 (Centrale PSI 2019) [Solution]

Soit $(E) : y'' + \varphi(t)y = 0$ où φ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Résoudre (E) dans le cas où φ est constante.
2. Soient f et g continues sur $[a, +\infty[$, g positive, telle que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq M + \int_a^t f(u)g(u) du$.

On pose $F(t) = M + \int_a^t f(u)g(u) du$ et $G(t) = \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$.

En calculant la dérivée de $\frac{F}{G}$, montrer que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq M \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$.

3. On suppose que $t \mapsto t\varphi(t)$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.
 - a) Soit y une solution de (E) . Justifier qu'il existe une fonction affine A telle que $y(t) = A(t) - \int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u) du$.
indication : poser $z(t) = - \int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u) du$ et calculer z'' .
 - b) En déduire que $t \mapsto \frac{y(t)}{t}$ est bornée sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

III Intégrabilité et convergence d'intégrales

Exercice 23 [Solution]

Déterminer la nature des intégrales suivantes, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{(1+t)^2} dt$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{t}) \ln t}{\sqrt{t} - \sin t} dt \quad ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2-t)}{(1+t)^2} dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta} dt \quad ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta - 1} dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} - \sin t} dt$$

indication : pour la dernière, à l'aide d'une IPP, prouver qu'elle a la même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t} dt$.

Exercice 24 (CCP PSI 2010) [Solution]

Limite en 0 de $tf(t)$ où $f(t) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \ln t \frac{\sin t}{t}\right)$. f est-elle intégrable sur $]0, 1[$?

Exercice 25 (Mines-Télécom PSI 2019) [Solution]

Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 26 (ICNA PSI 2019) [Solution]

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a et b , $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}) dt$ converge-t-elle ?
2. Calculer cette intégrale quand elle converge.

Exercice 27 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]

1. Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$.
2. Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice 28 (CCP PSI 2018) [Solution]

1. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\frac{1+X+X^2}{X(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$
2. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$.
3. Calculer I , sachant que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 29 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Étudier en fonction de $\alpha > 0$, la convergence de $\int_0^{+\infty} (e^{\sin^2 t/t^\alpha} - 1) dt$

Exercice 30 (CCP PSI 2010) [Solution]

Étudier l'intégrabilité sur $]0, 1[$ de $x \mapsto |\ln x|^\alpha$.

Exercice 31 (CCP PSI 2018) [Solution]

Déterminer la nature des deux intégrales suivantes : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice 32 (Telecom SudParis PSI 2014) [Solution]

Vérifier que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x - \ln(1-e^{-x})}{x} e^{-\alpha x} dx$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 33 (CCP PC 2010) [Solution]

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$.

Exercice 34 (IMT PSI 2019) [Solution]

Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan \frac{1}{t}\right) dt$ puis la calculer à l'aide du calcul de $\int_0^x t \arctan \frac{1}{t} dt$.

Exercice 35 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+ixy)}$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 36 (AADN MP 2010) [Solution]

Nature de $\int_0^{+\infty} (1 - \operatorname{th}^\alpha x) dx$? ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Exercice 37 (Centrale PSI 2010) [Solution]

$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ est-elle convergente?

Exercice 38 (Mines-Ponts PC 2014) [Solution]

Soient f continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $a > 0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f\left(\left|x - \frac{a}{x}\right|\right) dx$ existe.

Exercice 39 [Solution]

Etudier $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^2|\cos t|}$ puis étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2|\cos t|}$.

indication commencer par montrer que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^2|\cos t|} \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+n^2\pi^2|\sin t|}$.

Exercice 40 (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]

1. Montrer que $\int_0^\pi \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x}$ et calculer cette intégrale (poser $u = \tan x$).

2. Montrer que le série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^3 \sin^2 x}$ converge.

3. $x \mapsto \frac{1}{1+x^3 \sin^2 x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 41 [Solution]

En étudiant $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t}{1+t^6 \sin^2 t} dt$, montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t^6 \sin^2 t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 42 [Solution]

On pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$ et $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$.

Montrer que (v_n) est constante et que $u_n - v_n$ tend vers 0 puis déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

indication : montrer que $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 43 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Soient $u_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi nx)}{\tan(\pi x)} dx$ et $v_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi nx)}{\pi x} dx$.

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ converge.

2. Montrer que $v_n \sim \frac{\ln n}{2\pi}$.

indication : $u = \pi nx$ puis $\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos(2u))$ et couper en 1.

3. Montrer que $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et en déduire un équivalent de u_n .

indication : IPP et utiliser φ' bornée sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Exercice 44 (CCP PSI 2018) [Solution]

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ existe.

2. Montrer que $I = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

indication : commencer par $I = \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ et linéariser $\sin^3 t$

3. Déterminer la valeur de I .

indication : introduire $\int_x^{3x} \frac{dt}{t}$

Exercice 45 (CCP PSI 2015) [Solution]

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x^2} dx$.

1. Justifier l'existence de I .
2. Linéariser $\sin^5 x$.

En déduire deux constantes a et b telles que $\int_A^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x^2} dx = a \int_A^{5A} \frac{\sin x}{x^2} dx + b \int_A^{3A} \frac{\sin x}{x^2} dx$ pour tout $A > 0$.

3. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall 0 < \alpha < \beta, \left| \int_\alpha^\beta \frac{\sin t - t}{t^2} dt \right| \leq M(\beta - \alpha)$.
4. Calculer I .

Exercice 46 (Centrale PSI 2018) [Solution]

1. Justifier l'existence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$

2. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$; montrer l'existence et calculer la valeur de $I_{\alpha, \beta} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)}{t} dt$

Exercice 47 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

On pose $I_n = \int_0^\pi \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \cos(nx) dx$ et $J_n = \int_0^\pi \sin(nx) \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} dx$.

1. Montrer que I_n et J_n existent pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Trouver une relation entre I_n et J_n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Trouver une relation entre J_n et J_{n+1} .

4. Calculer I_0 ; on montrera que $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$.

5. Calculer I_n .

Exercice 48 [Solution]

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt$

Exercice 49 (Mines-Ponts PSI 2021) [Solution]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique. Montrer qu'il existe un unique réel λ pour lequel l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t) - \lambda}{t} dt$ est convergente

1. dans le cas où $f = \sin$
2. dans le cas général

indication : IPP en introduisant F une primitive de f et trouver λ tel que $F(t) - \lambda t = O(1)$

Exercice 50 (CCP PSI 2013) [Solution]

Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \frac{1}{t + \cos(t)}$ et, pour $x > 0$, $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

2. Montrer que, pour $x > 0$, $\int_0^x g(t)^2 dt = 2 \int_0^x f(t)g(t) dt - xg(x)^2$.

3. En déduire que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. (*indication : commencer par vérifier que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$*)

Exercice 51 (Centrale PSI 2014) [Solution]

Soient $\alpha > -1$ et f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, décroissante, telle que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Montrer que $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ et $t \mapsto t^\alpha f(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t) dt = -(\alpha + 1) \int_0^{+\infty} t^\alpha f(t) dt$

Exercice 52 (Mines-Ponts PC 2014) [Solution]

Soit f de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ telle que f' soit de carré intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est de carré intégrable sur $[1, +\infty[$.

indication : commencer par calculer la dérivée de $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ en fonction de $f'(t)$ et de $\frac{f(t)}{t}$.

IV Autres

Exercice 53 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\omega x} dx$ avec $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Justifier l'existence de I_n , la calculer et en déduire une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, non nulle, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^k f(t) dt = 0$.

indication : utiliser $\omega^3 = 1$ et prendre la partie imaginaire d'une intégrale réelle.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$. Montrer que $f = 0$; on pourra admettre $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in [a, b], |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.

indication : calculer $\int_a^b f(t)P(t) dt$ puis $\int_a^b f(t)^2 dt$

Exercice 54 (ENTPE PSI 2015) [Solution]

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $\pm\infty$. Justifier la convergence et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+1) - f(x-1) dx$.

Exercice 55 (Mines-Ponts PSI 2014) [Solution]

Déterminer le domaine de définition puis la limite en $+\infty$ de $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} e^{-xt} dt$.

Exercice 56 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $f(x) \times \int_0^x f^2(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

1. Si f admet une limite en $+\infty$, que vaut-elle ?
2. Donner un exemple de f vérifiant la condition de l'énoncé ?

indication : on peut en trouver un sous la forme $f(t) = (1+t)^\alpha$.

3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

indication : poser $g(x) = \int_0^x f^2(t) dt$ et traduire l'hypothèse avec la fonction g exclusivement ; montrer que si h est une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim_{+\infty} h'(x) = 0$ alors $\lim_{+\infty} \frac{1}{x} h(x) = 0$ en utilisant la ε -définition de limite.

Exercice 57 (Centrale PSI 2011) [Solution]

1. Montrer que $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ après avoir justifié son existence.

3. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $S_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{m}{n\sqrt{n^2 - m^2}}$ puis calculer la limite quand m tend vers $+\infty$.

indication : ça fait un peu penser à une somme de Riemann... sans en être vraiment une.

Solutions

Exercice 1 [sujet] 1. Si f ne s'annule pas sur $]0, 1[$, par continuité, elle garde un signe fixe ; si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, et si $\int_a^b f(t) dt = 0$ alors, par continuité, on a $f = 0$; absurde !

2. Appliquer la première question à $x \mapsto f(x) - x$.

Exercice 2 [sujet] $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + 2k/n} \sqrt{\frac{k/n}{2 + k/n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$ car $f : t \mapsto \frac{1}{1 + 2t} \sqrt{\frac{t}{2 + t}}$ est continue sur $[0, 1]$.
 $\int_0^1 f(t) dt \stackrel{u = \sqrt{\frac{t}{2+t}}}{=} \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{4u^2}{(1 + 3u^2)(1 - u^2)} du = \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + u}{1 - u} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(u\sqrt{3}) \right]_0^{1/\sqrt{3}} = \dots$

Exercice 3 [sujet] 1. $t \mapsto e^{nt^2}$ et $t \mapsto e^{-nt^2}$ sont continue sur $[0, 1]$ donc $f'_n(x) = e^{nx^2} + e^{-nx^2} > 0$

2. $f_n(0) < 0$ et $f_n(1) > 0$ donc f_n s'annule une seule fois. $f_0(x) = x - (1 - x)$ donc $c_0 = \frac{1}{2}$.

3. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x (e^{(n+1)t^2} - e^{nt^2}) dt - \int_x^1 (e^{-(n+1)t^2} - e^{-nt^2}) dt \geq 0$ donc $f_{n+1}(c_n) \geq 0$ et $c_{n+1} \leq c_n$. La suite (c_n) décroît donc CV vers l . On a $l \leq c_n \leq \int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq (1 - c_n)e^{-nc_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ si $l \neq 0$ ce qui est absurde donc $l = 0$

Exercice 4 [sujet] 1. $g : t \mapsto \frac{1}{t - \ln t}$ est continue sur $[x, 2x]$ pour tout $x > 0$ (étudier une fonction pour vérifier que le dénominateur ne s'annule pas) donc $f(x)$ existe. Par Chasles, on a $f(x) = \int_1^{2x} g(t) dt - \int_1^x g(t) dt$; comme g

est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{\ln 2 - \ln x}{> 0}$.

2. $\int_x^{2x} g(t) - \frac{1}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{\ln t}{t(t - \ln t)} dt$ donc, pour $x > 1$, $0 \leq \int_x^{2x} g(t) - \frac{1}{t} dt \leq \frac{\ln(2x)}{x(x - \ln x)}(2x - x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$; on a donc $f(x) \underset{+\infty}{=} \int_x^{2x} \frac{dt}{t} + o(1) = \ln 2 + o(1)$

3. $\lim g = 0$ donc g est prolongeable par continuité en 0 et f devient $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5 [sujet] 1. $g : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (prolongée par 0 en 0) ; si $x \in [0, 1[$ alors $[x^2, x] \subset [0, 1[$ et si $x > 1$ alors $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$. On en déduit que f est définie et même $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; comme $f(x) =$

$\int_0^{x^2} g(t) dt - \int_0^x g(t) dt$, on a (sur $[0, 1[$) $f'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{x - 1}{\ln x}$ (de même sur $]1, +\infty[$ en coupant en

2 par exemple). Pour la limite en 1, même idée que dans l'exercice précédent : $g(t) - \frac{1}{t-1} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{1}{2}$ (DL) donc $\int_x^{x^2} g(t) - \frac{1}{t-1} dt \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ (cette fonction est en fait $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$) ; on en déduit $f(x) \underset{1}{=} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} + o(1) = \ln 2 + o(1)$.

Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ ($\lim_0 f' = \lim_1 f' = 0$), on a $\int_0^1 f'(t) dt = f(1) - f(0) = \ln 2$.

2. En 1 : $f'(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{3}u^2 + o(u^2)} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{12}u^2 + o(u^2)$ donc $f(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} f(1) + u + \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{36}u^3 + o(u^3)$.

En $+\infty$: $f(x) \geq \frac{1}{\ln(x^2)}(x^2 - x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Exercice 6 [sujet] $g : t \mapsto \frac{\text{ch } t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$; si $x > 0$, $[x, 2x] \subset \mathbb{R}^{+*}$ et si $x < 0$, $[2x, x] \subset \mathbb{R}^{-*}$ donc f est définie

sur $\mathbb{R}^*$. En posant $u = -t$, on prouve que f est paire. Comme, pour $x > 0$, $f(x) = \int_1^{2x} g(t) dt - \int_1^x g(t) dt$, f est $\mathcal{C}^1$ sur

$\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{\text{ch}(2x) - \text{ch}(x)}{x}$.

En 0 : $\lim_0 \frac{\text{ch } t - 1}{t^2} = \frac{1}{2}$ d'où l'existence de α ; pour $0 < x \leq \frac{\alpha}{2}$, on a $0 \leq f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = f(x) - \ln 2 \leq \int_x^{2x} t dt = \frac{3}{2}x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

En $+\infty$: $f(x) \geq \frac{\text{ch}(x)}{2x}(2x - x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 7 [sujet] $\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan t)^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\frac{2}{3}$

Donc $\int_x^1 \frac{dt}{(\arctan t)^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \int_x^1 \frac{dt}{t^2} + C + o(1)$ avec $C = \int_0^1 \frac{1}{(\arctan t)^2} - \frac{1}{t^2} dt$; on en déduit $\int_x^1 \frac{dt}{(\arctan t)^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$.

Exercice 8 [sujet] 1. $g : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc ϕ est définie sur $\mathbb{R}^*$; comme $\phi(x) = \int_0^x g(t) dt -$

$$\int_0^{1/x} g(t) dt, \phi \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \phi'(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}g(1/x)$$

2. En posant $u = -t$, on prouve que ϕ est impaire. $\phi \geq 0$ sur $[1, +\infty[$, $\phi \leq 0$ sur $]0, 1]$.

3. $\lim_{+\infty} \phi = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = I$ car $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

4. Pour la même raison, $\lim_{0^+} \phi = -I$ et par imparité, $\lim_{0^-} \phi = I$; comme $I \neq 0$, ϕ n'a pas de limite en 0.

Exercice 9 [sujet] 1. $f(x) - \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} - \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ (intégrable car $\underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1$) donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \int_1^x \frac{dt}{t} + C + o(1)$ et $f(x) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

$$\int_1^x \frac{dt}{t} + C + o(1) \text{ et } f(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

$$2. f(x) - \ln(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_1^0 \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

Exercice 10 [sujet] 1. Si $x > 0$ $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ (car $\underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$) donc $f(x)$ existe. Comme

$$f(x) = f(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ et } t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}, f \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

2. En 0 : $f(x) - \int_x^1 \frac{dt}{t} = f(1) + \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(1) + \int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ (intégrable car limite finie en 0) donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \int_x^1 \frac{dt}{t} + C + o(1) \text{ et } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t} = \ln(x)$$

$$\text{En } +\infty : (\text{IPP}) f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \text{ puis } 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^2} \text{ donc } \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \text{ et } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$$

3. f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ d'après les équivalents précédents puis par IPP $\int_0^{+\infty} f(t) = [tf(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t) dt =$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

Exercice 11 [sujet] 1. Si $x > 0$ $g : t \mapsto \frac{1}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et intégrable car $\underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc

$f(x)$ existe

2. $g(t) - \frac{1}{t\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2t}$ donc il existe α tel que sur $]0, \alpha]$, on ait $\left|g(t) - \frac{1}{t\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{t}$. On a alors $f(x) = f(\alpha) + \int_x^\alpha g(t) - \frac{1}{t\sqrt{t}} dt + \int_x^\alpha \frac{dt}{t\sqrt{t}}$; puis $\int_x^\alpha \frac{dt}{t\sqrt{t}} = \left[\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_x^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}}$ et $\left|\int_x^\alpha g(t) - \frac{1}{t\sqrt{t}} dt\right| \leq \int_x^\alpha \frac{dt}{t} = [\ln t]_x^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ d'où le résultat.

3. Poser $s = \sqrt{t}$ puis $f(x) = 2 \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})} ds$ et IPP $f(x) = -2 \frac{\ln(1 - e^{-\sqrt{x}})}{\sqrt{x}} + 2 \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln(1 - e^{-s})}{s^2} ds$. Ensuite,

$$\frac{\ln(1 - e^{-\sqrt{x}})}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \text{ et comme } \frac{\ln(1 - e^{-s})}{s^2} \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{e^{-s}}{s^2} \text{ il existe } A \text{ tel que si } s > A \text{ on ait } \left|\frac{\ln(1 - e^{-s})}{s^2}\right| \leq$$

$$2 \frac{e^{-s}}{s^2}; \text{ enfin pour } x > A, \text{ on a } \left|\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln(1 - e^{-s})}{s^2} ds\right| \leq 2 \int_x^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s^2} ds \leq \frac{1}{x} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-s} ds = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)$$

4. Il suffit de prouver que f est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour terminer la justification de l'intégrabilité et faire une IPP : $f(x) = \int_1^x g(t) dt + f(1)$ et g continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ permet de conclure.

Exercice 12 [sujet] 1. Si $x < 0$, $\min\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\right) = x$ donc l'intégrale DV, $f(0) = 0$ et si $x > 0$, $\min\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim}$

x et $\min\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ (sans oublier que la fonction est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$)

Si $x \leq 1$ alors $f(x) = \int_0^{1/\sqrt{x}} x dt + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 2\sqrt{x}$ et si $x > 1$, $f(x) = \int_0^{1/x^2} x dt + \int_{1/x^2}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 3 - \frac{1}{x}$.

2. f est continue en 1 et dérivable en 1 (et même $\mathcal{C}^1$)

Exercice 13 [sujet] 1. Linéarité évidente et comme f est continue, $\varphi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ donc continue; $|\varphi(f)(x)| \leq \|f\|_\infty$

2. On vérifie par récurrence sur n que $\varphi^n(f)$ est $\mathcal{C}^n$, que $(\varphi^n(f))^{(k)}(0) = 0$ si $k \leq n-1$ et $(\varphi^n(f))^{(n)} = f$. On applique ensuite la formule de Taylor avec reste intégral à $\varphi^n(f)$: $\varphi^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$ ce qui donne

$$|\varphi^n(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \|f\|_\infty \frac{x^n}{n!} \leq \frac{\|f\|_\infty}{n!} \text{ donc } \|\varphi^n(f)\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{n!}$$

Exercice 14 [sujet] 1. Linéarité facile, $u(f)(0) = 0$ et comme $u(f)(x) = \cos(x) \int_0^x f \times \cos + \sin(x) \int_0^x f \times \sin$, la continuité de f donne la classe $\mathcal{C}^1$ de $u(f)$.

2. Si $u(f) = k$ alors $k = u(f)(0) = 0$ et $u(f)' = 0$ et $u(f)'(x) = f(x) - \sin(x) \int_0^x f \times \cos + \cos(x) \int_0^x f \times \sin$ donc $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(x) \int_0^x f \times \cos - \cos(x) \int_0^x f \times \sin$ est $\mathcal{C}^1$ puis $f'(x) = \cos(x) \int_0^x f \times \cos - \sin(x) \int_0^x f \times \sin = u(f)(x) = 0$; reste $f = 0$.

3. Si $\lambda \neq 0$ alors $f = \frac{1}{\lambda} u(f)$ est $\mathcal{C}^1$ puis $f(0) = 0$ et $\lambda f'(x) = f(x) - \sin(x) \int_0^x f \times \cos + \cos(x) \int_0^x f \times \sin$ donc f est $\mathcal{C}^2$, $f'(0) = 0$ et $f''(x) = f'(x) - u(f)(x) = f'(x) - \lambda f(x)$; la seule solution avec $f(0) = f'(0) = 0$ est $f = 0$.

Exercice 15 [sujet] 1. Linéarité facile; comme $f(x) = f(0) + o(1)$, $\int_0^x f(t) dt = 0 + f(0)x + o(x)$ et $\lim_0 T(f) = f(0)$ donc $T(f)$ est continue.

2. T est injectif : si $T(f) = 0$ alors $\int_0^x f(t) dt = 0$ pour tout $x > 0$; en dérivant, on obtient $f = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $\mathbb{R}^+$ par continuité.

T n'est pas surjectif : si $g = T(f)$ alors g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car f est continue) donc toute fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et non dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ n'a pas d'antécédent ($x \mapsto |x-1|$ par exemple)

3. Si $\lambda \neq 0$ et $x > 0$ alors $f = \frac{1}{\lambda} T(f)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\lambda(xf'(x) + f(x)) = f(x)$, ce qui donne $f(x) = \frac{\alpha}{x^{1-1/\lambda}}$ pour $x > 0$. Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$ ces solutions ne se prolongent pas par continuité en 0 donc pas de solution autre que $f = 0$; si $\lambda = 1$ toutes les solutions constantes conviennent et si $\lambda \in]0, 1[$, on a aussi $\lambda f(0) = f(0)$ donc $f(0) = 0$ puis $f = 0$.

Exercice 16 [sujet] 1. $2G(x) = \int_0^x (x-t)g(t) dt + \int_x^1 (t-x)g(t) dt = x \int_0^x g(t) dt - \int_0^x tg(t) dt - \int_1^x tg(t) dt + x \int_1^x g(t) dt$ donc G est $\mathcal{C}^1$ (car g est continue) et $2G'(x) = \int_0^x g(t) dt + \int_1^x g(t) dt$; G' est $\mathcal{C}^1$ et $G'' = g$.

2. $f'' = g$ est toujours vrai et $f(0) = f(1) = 0$ donne un système linéaire fixant a et b .

3. Si h est une autre fonction telle que $h'' = g$ et $h(0) = h(1) = 0$ alors $h'' = g = f''$ donc $h(x) = f(x) + \alpha x + \beta x$ et $h(0) = f(0) = h(1) = f(1) = 0$ donne $a = b = 0$ donc solution unique.

Exercice 17 [sujet] 1. Si $f'' = 0$ alors $f(x) = ax + b$ puis $f(0) = f(1) = 0$ donne $f = 0$ et ϕ est injective. Soit $f \in F$ et F telle que $F'' = f$ (existe car f est continue), on peut trouver (a, b) tel que si $G(x) = F(x) + ax + b$, on ait $G(0) = G(1) = 0$ (et on aura encore $G'' = f$) donc ϕ est surjective.

2. $2G(x) = \int_0^x (x-t)g(t) dt + \int_x^1 (t-x)g(t) dt = x \int_0^x g(t) dt - \int_0^x tg(t) dt - \int_1^x tg(t) dt + x \int_1^x g(t) dt$ donc G est $\mathcal{C}^1$ (car g est continue) et $2G'(x) = \int_0^x g(t) dt + \int_1^x g(t) dt$; G' est $\mathcal{C}^1$ et $G'' = g$.

3. On cherche (a, b) de sorte que $x \mapsto G(x) + ax + b$ s'annule en 0 et 1 et on trouve $\phi^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t|f(t) dt - \frac{x}{2} \int_0^1 (1-2t)f(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 tf(t) dt$ donc $k(x, t) = \frac{1}{2}(|x-t| - x(1-2t) - t)$. k est continue sur le fermé borné $[0, 1]^2$ donc il suffit de prendre $C \geq \max_{[0, 1]^2} |k(x, t)| = \frac{1}{4}$ (la valeur de ce maximum se trouve par une étude de points critiques sur les domaines $x > t$ et $x < t$; il est atteint en $x = t = \frac{1}{2}$)

Exercice 18 [sujet] Si f est solution alors $f'(0) = 10$ et $f'(x) = 10 - 5 \cos(x) \int_0^x f \times \cos - 5 \sin(x) \int_0^x f \times \sin$ est $\mathcal{C}^1$; on en déduit $f''(x) = 5f(x) + 5 \sin(x) \int_0^x f \times \cos - 5 \cos(x) \int_0^x f \times \sin$ qui est à nouveau $\mathcal{C}^1$. Enfin on trouve $f''(0) = 5f(0) = 10$ et $f'''(x) = 5f'(x) + 5 \cos(x) \int_0^x f \times \cos + 5 \sin(x) \int_0^x f \times \sin = 5f'(x) + 10 - f'(x)$. On en déduit f avec l'équation différentielle vérifiée par f' et les conditions initiales sur f, f' et f'' : $f(x) = \frac{35}{8}e^{2x} - \frac{15}{8}e^{-2x} - \frac{5}{2}x + 10$

Exercice 19 [sujet] 1. Pour $x > 0$, on a $f(x) \stackrel{u=x-t}{=} \frac{1}{x^2} \left(2x \int_0^x f(u) du - 2 \int_0^x u f(u) du \right)$ donc f est $\mathcal{C}^1$ car f et $id \times f$ sont $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis $\mathcal{C}^\infty$ par récurrence
 2. On trouve $x^2 f''(x) + 4x f'(x) = 0$
 3. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) = \frac{\alpha}{x^3} + \beta$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, on doit avoir $\alpha = 0$; réciproquement les fonctions constantes sont solutions

Exercice 20 [sujet] 1. Linéarité facile; $\phi(f)(x) = \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$ donc, comme f est continue, $\phi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ donc continue.

ϕ est injectif : si $\phi(f) = 0$ alors $\phi(f)' = 0$ et $\phi(f)'(x) = \int_x^1 f(t) dt$ qui est $\mathcal{C}^1$ donc $f = -\phi(f)'' = 0$

Si $g = \phi(f)$ alors g est $\mathcal{C}^2$, $g(0) = 0$ et $g'(1) = 0$: $\text{Im } \phi \subset \{g \in \mathcal{C}^2, g(0) = g'(1) = 0\}$. Réciproquement avec g dans cet ensemble, on vérifie $g = -\phi(g'')$

2. $(\phi(f))'' = -f$.

Exercice 21 [sujet] 1. Non (cf cours)

2. $g(x) = f(x) + \sin(x) \int_0^x a f \times \cos - \cos(x) \int_0^x a f \times \sin$ donc $g'(x) = f'(x) + \cos(x) \int_0^x a f \times \cos + \sin(x) \int_0^x a f \times \sin$ et $g''(x) = f''(x) + a f(x) - \sin(x) \int_0^x a f \times \cos + \cos(x) \int_0^x a f \times \sin = -g(x)$

3. $g = \alpha \cos + \beta \sin$ est bornée ($|g| \leq c$) puis $|f(x)| \leq |g(x)| + \left| \int_0^x \sin(x-t) a(t) f(t) dt \right| \leq c + \int_0^x |a f|$

4. On pose $u(x) = c + \int_0^x |a f|$; u est $\mathcal{C}^1$, strictement positive (car $c > 0$) et vérifie $\frac{u'(x)}{u(x)} \leq |a(x)|$. On en déduit $u(x) \leq c \exp \int_0^x |a| \leq c \exp \int_0^{+\infty} |a|$ et avec $|f| \leq u$, on trouve f bornée.

Exercice 22 [sujet] 1. Si $\varphi = -\alpha^2 < 0$ alors $y(t) = a e^{\alpha t} + b e^{-\alpha t}$; si $\varphi = 0$ alors $y(t) = at + b$ et si $\varphi = \omega^2 > 0$ alors $y(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$.

2. $f g$ et g sont continues donc F et G sont $\mathcal{C}^1$ et $\left(\frac{F}{G}\right)'(t) = \frac{g(t)(f(t) - F(t))}{G(t)^2} \leq 0$. On a donc $\frac{F(t)}{G(t)} \leq \frac{F(0)}{G(0)} = M$ ce qui donne le résultat en réutilisant $f(t) \leq F(t)$.

3. a) On a $z(t) = -t \int_a^t y(u) \varphi(u) du + \int_a^t u y(u) \varphi(u) du$ donc $z''(t) = -\varphi(t) y(t) = y''(t)$ et on a bien $z(t) = y(t) + \alpha t + \beta$

b) On a $\left|\frac{y(t)}{t}\right| \leq \frac{|\alpha t + \beta|}{t} + \int_a^t \left(1 - \frac{u}{t}\right) |y(u) \varphi(u)| du$. Puis $\frac{|\alpha t + \beta|}{t} \leq |\alpha| + \frac{|\beta|}{a} = M$ sur $[a, +\infty[$ (car $a > 0$) et $\int_a^t \left(1 - \frac{u}{t}\right) |y(u) \varphi(u)| du \leq \int_a^t |y(u) \varphi(u)| du = \int_a^t \left|\frac{y(u)}{u}\right| \times u |\varphi(u)| du$. On peut donc appliquer 2, ce qui donne $\left|\frac{y(t)}{t}\right| \leq M \exp\left(\int_a^t |u \varphi(u)| du\right) \leq M \exp\left(\int_a^{+\infty} u |\varphi(u)| du\right)$.

Exercice 23 [sujet] 1. $\frac{\ln(1-t^2)}{(1+t)^2} \sim \frac{1}{4} \ln(1-t)$ et $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, 1[$ donc intégrable.

2. $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, 1]$ et $\sim \ln(t)$ donc intégrable.

3. $\mathcal{CM}^0$ sur $]1, +\infty[$, $\sim \frac{1}{4} \ln(t-1)$ et $\sim_{+\infty} 2 \frac{\ln t}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc intégrable.

4. $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$. La fonction est positive donc intégrable équivaut à intégrale CV. Si $\beta = 0$ par intégrable; si $\beta > 0$, $\sim_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\sim_0 \frac{1}{t^{-\alpha}}$ donc intégrable si et seulement si $\alpha > -1$; si $\beta < 0$, $\sim_{+\infty} \frac{1}{t^{-\alpha}}$ et $\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ donc intégrable si et seulement si $\alpha < -1$

5. $\mathcal{CM}^0$ sur $]1, +\infty[$, $\underset{1}{\sim} \frac{1}{\beta}(t-1)^{\alpha-1}$ et $\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\beta(\ln t)^{-\alpha}}$ (Bertrand) donc intégrable (ou CV car signe fixe) si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

6. $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$ et par IPP (justifier!) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} - \sin t} dt$ de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t) \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \cos t\right)}{(\sqrt{t} - \sin t)^2} dt$ puis $\frac{\cos(t) \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)}{(\sqrt{t} - \sin t)^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc intégrable et $\frac{\cos^2(t)}{(\sqrt{t} - \sin t)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cos^2 t}{t}$ non intégrable (même preuve que $\frac{\sin t}{t}$)

Exercice 24 [sujet] $tf(t) = \exp\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 + \sqrt{t} \ln t \left(\frac{\sin t}{t} + 1\right)\right)\right] \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty$ donc $\frac{1}{t} \underset{0}{=} o(f(t))$ donc non intégrable.

Exercice 25 [sujet] $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$ et $\xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ donc CV

Exercice 26 [sujet] 1. $f(t) \underset{+\infty}{=} (1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc l'intégrale CV si et seulement si $\begin{cases} a+b+1=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$

2. $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t+2}) dt = \left[\frac{2t\sqrt{t}}{3} - \frac{4}{3}(t+1)\sqrt{t+1} + \frac{2}{3}(t+2)\sqrt{t+2} \right]_0^{+\infty} = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$ car $\frac{2t\sqrt{t}}{3} - \frac{4}{3}(t+1)\sqrt{t+1} + \frac{2}{3}(t+2)\sqrt{t+2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

Exercice 27 [sujet] 1. $\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3t^3}$

2. La fonction est intégrable par l'équivalent précédent et $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{\pi}{4} - 1 + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2} \ln 2$

Exercice 28 [sujet] 1. $\frac{1+X+X^2}{X(X+1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{(1+X)^2}$

2. $t \mapsto t \left[\frac{1}{t}\right]$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, 1]$ et $0 \leq t \left[\frac{1}{t}\right] \leq 1$ donc intégrable sur $]0, 1]$

3. $I = \sum_{k \geq 1} \int_{1/k+1}^{1/k} kt dt = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} - \frac{k}{(k+1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$

Exercice 29 [sujet] $f : t \mapsto e^{\sin^2 t/t^\alpha} - 1$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme $\alpha > 0$ $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, on vérifie que $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt \geq \frac{\pi}{2(n+1)\pi}$ puis $\frac{\sin^2 t}{t} \underset{+\infty}{=} o(f(t))$ pour $\alpha < 1$.

Si $\alpha \leq 2$, f admet une limite finie en 0 alors que si $\alpha > 2$, $\frac{1}{t} \underset{0}{=} o(f(t))$ donc f n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.

En conclusion, f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (donc l'intégrale CV car $f \geq 0$) si et seulement si $\alpha \in]1, 2]$.

Exercice 30 [sujet] $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, 1]$ si $\alpha > 0$ et $\underset{0}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc intégrable sur $]0, 1]$.

Exercice 31 [sujet] $\frac{e^{\sin t}}{t} \geq \frac{e^{-1}}{t}$ donc l'intégrale DV. Pour la seconde : $t \mapsto \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ donc intégrable sur $]0, 1]$; $\sin(t) \left[\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\right] \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ sont de même nature donc CV (cf cours)

Exercice 32 [sujet] $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $\frac{1}{0}$ et $\underset{+\infty}{=} o(e^{-\alpha x})$ donc intégrable si $\alpha > 0$

Exercice 33 [sujet] $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $\underset{0}{\sim} -2 \ln t$ et $\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc intégrable. Par IPP (justifier!) $I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$

Exercice 34 [sujet] $\lim_0 f = 1$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3t^2}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par IPP, $\int_0^x t \arctan \frac{1}{t} dt = \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2}(x - \arctan x)$ donc $\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2}(x + \arctan x) - \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$
 car $x^2 \arctan \frac{1}{x} \underset{+\infty}{=} x + o(1)$.

Exercice 35 [sujet] $\frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ puis $I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-ixy)}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$
 (la partie imaginaire intégrée est impaire). On vérifie ensuite $I(y) = I(-y)$ en posant $t = -x$ et si $y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$,
 $I(y) = \frac{1}{1-y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+x^2y^2} \right) dx = \frac{\pi}{1+y}$. On termine, soit en calculant directement $I(1)$, soit en vérifiant
 la continuité de I sur $\mathbb{R}^+$ par $\left| \frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)} \right| = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}$. En conclusion $I(y) = \frac{\pi}{1+|y|}$

Exercice 36 [sujet] $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$; si $\alpha = 0$ c'est nul, si $\alpha > 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et si $\alpha < 0 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{x^{-\alpha}}$; de l'autre côté,
 $\underset{+\infty}{\sim} 2\alpha e^{-2x}$ donc intégrable si et seulement si $\alpha > -1$.

Exercice 37 [sujet] $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, 1[$ et $\underset{1}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{\sqrt{2(1-x)}} = o\left(\frac{1}{(1-x)^{3/4}}\right)$ donc intégrable.

Exercice 38 [sujet] On a $x - \frac{a}{x} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{a}$ donc on transforme $\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(x - \frac{a}{x}\right) dx$ en posant $u = x - \frac{a}{x} \Leftrightarrow$
 $u = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4a}}{2} : u \mapsto \frac{u + \sqrt{u^2 + 4a}}{2}$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $]\sqrt{a}, +\infty[$ donc (CV
 équivalentes) $\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(x - \frac{a}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(u) \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4a}}\right) du$ qui CV puisque $\left|f(u) \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4a}}\right)\right| \leq 2|f(u)|$.
 En posant $u = \frac{a}{x} - x$ sur $]0, \sqrt{a}[$, on finit par $I = \int_0^{+\infty} f(u) du$.

Exercice 39 [sujet] 1. On pose (justifier!) $t = n\pi + \frac{\pi}{2} + x : \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^2|\cos t|} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+(n\pi + \frac{\pi}{2} + x)^2|\sin x|} \leq$
 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+(n\pi)^2|\sin x|}$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ donc $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+(n\pi)^2|\sin x|} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(n\pi)^2 \sin x} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2n^2\pi x} =$
 $\frac{\ln(1+n^2\pi^2)}{2n^2\pi} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc la série est AC.

2. La fonction est $\mathcal{CM}^0$ et positive sur $[0, +\infty[$ donc si $x > 0$, il existe N tel que $(N+1)\pi \geq x$ puis $\int_0^x f(t) dt \leq$
 $\sum_{k=0}^N \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt$; la fonction est positive, les « intégrales partielles » sont majorées donc
 f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 40 [sujet] 1. Poser (justifier!) $t = \pi - x$ sur la partie $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ puis on trouve $I = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$

2. On pose $x = n\pi + u$ puis en utilisant $n\pi + u \geq n\pi$, on obtient $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^3}}$ (avec $a = (n\pi)^{3/2}$); on en
 déduit $u_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum u_n$ est AC

3. On prouve l'intégrabilité comme dans l'exercice précédent puisque la fonction est à nouveau positive.

Exercice 41 [sujet] On pose $t = n\pi + u$ (justifier!) $u_n = \int_0^\pi \frac{n\pi + u}{1+(n\pi + u)^6 \sin^2 u} du \leq \int_0^\pi \frac{(n+1)\pi}{1+(n\pi)^6 \sin^2 u} du =$
 $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (même calcul que dans l'exercice précédent); on conclut à l'intégrabilité de la même façon puisque la fonction
 est positive.

Exercice 42 [sujet] 1. $\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t = 2\sin t \cos(n+1)t$ donne $v_{n+1} = v_n$ donc $v_n = v_0 = \frac{\pi}{2}$

2. On vérifie que $h(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (faire des DL de h et h' pour vérifier la
 continuité puis la classe $\mathcal{C}^1$); on a alors $u_n - v_n = \int_0^{\pi/2} h(t) \sin(2n+1)t dt$ puis par IPP (justifier!) $u_n - v_n =$
 $\frac{h(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} h'(t) \cos(2n+1)t dt$ et $|u_n - v_n| \leq \frac{|h(0)|}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} |h'(t)| dt$

3. On en déduit que (u_n) tend vers $\frac{\pi}{2}$ et en posant $u = (2n+1)t$, on trouve aussi $I = \lim u_n$ (la CV de I a été faite en cours)

Exercice 43 [sujet] 1. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \sin(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du$ et $\left| \frac{\sin u}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2}$.

2. v_n existe car $\sin^2 u \underset{0}{\sim} u^2$. $v_n = \int_0^1 \frac{1 - \cos 2u}{2\pi u} du + \int_1^{n\pi/2} \frac{du}{2\pi u} - \int_1^{n\pi/2} \frac{\cos 2u}{2\pi u} du$; tous les termes ont une limite finie quand $n \rightarrow +\infty$ à part $\int_1^{n\pi/2} \frac{du}{2\pi u} \sim \frac{\ln n}{2\pi}$

3. Par DL, $\varphi(0) = 0$ puis vérifier la classe $\mathcal{C}^1$ de φ par un DL de φ' en 0.

u_n existe car $\frac{\sin^2 u}{\tan u} \underset{0}{\sim} u$ et $\left| \frac{\sin^2 \pi n x}{\tan \pi x} \right| \leq \frac{1}{\tan \pi x} \xrightarrow{x \rightarrow 1/2^-} 0$. On a $u_n - v_n = \int_0^{1/2} \varphi(x) \frac{1 - \cos(2\pi n x)}{2} dx \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \varphi(x) dx + \frac{1}{4n\pi} \int_0^{1/2} \varphi'(x) \sin(2\pi n x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(1)$ car $\left| \int_0^{1/2} \varphi'(x) \sin(2\pi n x) dx \right| \leq \int_0^{1/2} |\varphi'(x)| dx$. On en déduit $u_n \sim v_n \sim \frac{\ln n}{2\pi}$.

Exercice 44 [sujet] 1. $t \mapsto \frac{\sin^3 t}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, tend vers 0 en 0 et $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$

2. $\sin^3 t = \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin 3t)$ donc (les intégrales CV) $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{1}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2} dt \right)$ puis poser $u = 3t$ dans la seconde (et relation de Chasles)

3. $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \left(\frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt = 0$ et $I = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{dt}{t} = \frac{3}{4} \ln 3$

Exercice 45 [sujet] 1. $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2. $\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x)$; après chgts de variables $u = 5x$ et $u = 3x$, on trouve $a = -\frac{5}{16}$ et $b = \frac{15}{16}$

3. $t \mapsto \frac{\sin t - t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et tend vers 0 en 0 et $+\infty$ donc est bornée (à savoir prouver!)

4. On en déduit $\lim_{A \rightarrow 0} \int_A^{5A} \frac{\sin t}{t^2} dt = \lim_{A \rightarrow 0} \int_A^{5A} \frac{dt}{t} = \ln(5)$ puis $I = -\frac{5}{16} \ln 3 + \frac{15}{16} \ln 5$

Exercice 46 [sujet] 1. Par IPP (à justifier), $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ sont de même nature et $\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, donc intégrable sur $[1, +\infty[$

2. $\frac{\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ donc int sur $]0, 1]$; l'intégrale sur $[1, +\infty[$ existe aussi par IPP (cf Q1). On vérifie, pour $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)}{t} dt \stackrel{u=\alpha t}{\underset{v=\beta t}{=}} \int_{\alpha x}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du - \int_{\beta x}^{+\infty} \frac{\cos(v)}{v} dv = \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ puis comme $t \mapsto \frac{\cos(t) - 1}{t}$ se prolonge par continuité en 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\cos(t) - 1}{t} dt = 0$, ce qui donne $I_{\alpha, \beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

Exercice 47 [sujet] 1. Pour $I_n : \mathcal{CM}^0$ sur $]0, \pi]$ et $\sim \ln x$ donc intégrable. Pour $J_n : \mathcal{CM}^0$ sur $]0, \pi]$ et $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 2n$ donc intégrable

2. IPP (justifier!) $I_n = -\frac{1}{2n} J_n$

3. $J_{n+1} = J_n$ si $n \geq 1$

4. fait en cours

5. Si $n \geq 1$ $I_n = -\frac{1}{2n} J_1 = -\frac{\pi}{n}$

Exercice 48 [sujet] $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $\underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc intégrable; égalité et CV de la première intégrale : IPP (justifier!)

Exercice 49 [sujet] 1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ CV (cf cours) donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t) - \lambda}{t} dt$ CV si et seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t} dt$ CV, ce qui n'arrive que pour $\lambda = 0$.

2. On pose $F(x) = \int_0^x f(u) du$; il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nT \leq x < (n+1)T$ (c'est $n = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$) et on a $F(x) = n \int_0^T f(u) du + \int_{nT}^x f(u) du$; comme f est continue et T -périodique, elle est bornée (et atteint ses bornes) sur le segment $[0, T]$ puis sur $\mathbb{R}$. On a donc $\left| \int_{nT}^x f(u) du \right| \leq T \|f\|_\infty$ (bornée) et donc avec $\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) du$ (valeur moyenne de f), on a $F(x) = \lambda x + O(1)$. On fait alors une IPP avec $u'(t) = f(t) - \lambda$ et $v(t) = \frac{1}{t}$: on a $u(t)v(t) = \frac{F(t) - \lambda t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{f(t) - \lambda}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{F(t) - \lambda t}{t^2} dt$ sont de même nature et la seconde converge car $\frac{F(t) - \lambda t}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Reste l'unicité: si l'intégrale CV aussi pour un $\mu \in \mathbb{R}$, par linéarité, $\int_1^{+\infty} \frac{\mu - \lambda}{t} dt$ est CV donc $\lambda - \mu = 0$.

Exercice 50 [sujet] 1. $f(t) = 1 + o(1)$ donc $\int_0^x f(t) dt = 0 + x + o(x)$ et $\lim_0 g = 1$.

2. Avec $F(x) = \int_0^x f(t) dt = xg(x)$, (IPP) $\int_0^x f(t)g(t) dt = \left[F(t)g(t) \right]_0^x - \int_0^x F(t)g'(t) dt = xg(x)^2 - \int_0^x tg(t) \left(-\frac{1}{t}g(t) + \frac{f(t)}{t} \right) dt$ et regrouper

3. f^2 est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, +\infty[$ et $\sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$ donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Puis $xg(x)^2 \geq 0$ donc (Cauchy-Schwarz) $\int_0^x g(t)^2 dt \leq 2 \left(\int_0^x f(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x g(t)^2 dt \right)^{1/2}$ et en divisant $\int_0^x g(t)^2 dt \leq 4 \int_0^x f(t)^2 dt$ (même si $g^2 = 0$) puis $\int_0^x g(t)^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$; « intégrales partielles » d'une fonction positive majorées donc intégrable.

Exercice 51 [sujet] Les deux fonction sont $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $t^{\alpha+1}f'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ car $\alpha + 1 > 0$ et $t^\alpha f(t) = O\left(\frac{1}{t^{-\alpha}}\right)$ intégrable sur $]0, 1]$ car $-\alpha < 1$. Par IPP $x^{\alpha+1}f(x) = \int_0^x t^{\alpha+1}f'(t) dt + (\alpha+1) \int_0^x t^\alpha f(t) dt$; Par hypothèse, $\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t) dt$ CV et par négativité de f' , $\int_0^x t^{\alpha+1}f'(t) dt$ a une limite dans $\mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$ donc $x^{\alpha+1}f(x)$ a une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Si la limite est non nulle, on a $\frac{1}{t} = O(t^\alpha f(t))$ ce qui contredit l'intégrabilité de $t \mapsto t^\alpha f(t)$. La limite est nulle donc on a l'égalité, la CV des intégrales (et les intégrabilités car f' est de signe fixe).

Exercice 52 [sujet] On pose $g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t) = \frac{f(t)}{t}$ puis on vérifie $f'(t) = \sqrt{t}g'(t) + \frac{1}{2}h(t)$ et $f'(t)^2 = (\sqrt{t}g'(t))^2 + \frac{1}{4}(h(t))^2 + \frac{1}{2}(g^2)'(t)$ car $\sqrt{t}g'(t)h(t) = g'(t)g(t)$. En intégrant sur $[1, x]$, on arrive à $\int_1^x h(t)^2 dt \leq 4 \int_1^x f'(t)^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt$, les « intégrales partielles » de $h^2 \geq 0$ sont majorées donc intégrable.

Exercice 53 [sujet] 1. $x^n e^{\omega x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ car $\text{Re}(\omega) < 0$ puis $I_n \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[x^n \frac{e^{\omega x}}{\omega} \right]_0^{+\infty} - \frac{n}{\omega} I_{n-1}$ donc $I_n = (-1)^{n+1} \frac{n!}{\omega^{n+1}}$. Comme $\omega^3 = 1$, on en déduit $\text{Im}(I_{3n+2}) = 0$ donc $0 = \int_0^{+\infty} x^{3n+2} \text{Im}(e^{\omega x}) dx \stackrel{t=x^3}{=} \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} t^n \text{Im}(e^{\omega t^{1/3}}) dt$; il suffit donc de prendre $f(t) = \frac{1}{3} e^{-t^{1/3}/3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t^{1/3}\right)$ (qui est bien continue sur $\mathbb{R}^+$).

2. Par linéarité on a $\int_a^b f(t)P(t) dt = 0$ pour tout polynôme P donc avec le polynôme P donné par le résultat admis ($\varepsilon > 0$ fixé), on a $\int_a^b f(t)^2 dt = \int_a^b f(t)(f(t) - P(t)) dt \leq \varepsilon(b-a)\|f\|_\infty$ donc $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$ et $f = 0$ (car f^2 est continue et positive)

Exercice 54 [sujet] On a $\int_0^A f(x+1) - f(x-1) dx = - \int_{-1}^1 f(u) du + \int_{A-1}^{A+1} f(u) du$; pour $\varepsilon > 0$, si A grand alors $|f(u)| \leq \varepsilon$ sur $[A-1, +\infty[$ donc $\left| \int_{A-1}^{A+1} f(u) du \right| \leq 2\varepsilon$ donc tend vers 0 si A tend vers $+\infty$. On en déduit $\int_0^{+\infty} f(x+1) - f(x-1) dx = - \int_{-1}^1 f(u) du$. On fait de même sur l'autre partie et on trouve $I = 0$.

Exercice 55 [sujet] $t \mapsto e^{-t^2} e^{-xt}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, +\infty[$, $\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ donc $\lim_{+\infty} f = 0$.

Exercice 56 [sujet] 1. Si $f \rightarrow L > 0$ alors $\int_0^x f^2(t) dt \rightarrow +\infty$ et $f(x) \int_0^x f^2(t) dt \rightarrow +\infty$ ce qui est absurde.

2. $f(t) = (1+t)^{-1/3}$ convient (avec $\ell = 3$)

3. On a $g'(x) = f^2(x)$ donc l'hypothèse est $\sqrt{g'(x)}g(x) \rightarrow \ell$ ou bien $g'(x)g^2(x) \rightarrow \ell^2$, ce qui signifie $\frac{1}{3}(g^3(x))' \rightarrow \ell^2$.

Si $\lim_{+\infty} h' = 0$ alors $|h'(t)| < \varepsilon$ pour $x \geq A$ donc $\left| \frac{h(x) - h(0)}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x h'(t) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^A |h'(t)| dt + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ pour

$x \geq B \geq A$, car A étant fixé, l'intégrale $\int_0^A |h'(t)| dt$ est une constante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^A |h'(t)| dt = 0$. On a donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x) - h(0)}{x} = 0$ donc $\frac{1}{x}h(x) \rightarrow 0$.

On utilise cette propriété avec $h(x) = \frac{1}{3}g^3(x) - \ell^2 x$: on a bien $h'(x) \rightarrow 0$ par hypothèse et $\frac{1}{x}h(x) = \frac{1}{3x}g^3(x) - \ell^2$;

on en déduit successivement $g^3(x) \sim 3x\ell^2$ puis $g(x) \sim (3x\ell^2)^{1/3}$ et enfin $f(x) \sim \frac{\ell}{g(x)} \sim \left(\frac{\ell}{3x}\right)^{1/3}$.

Exercice 57 [sujet] 1. Étudier la fonction

2. $\mathcal{CM}^0$ sur $]1, +\infty[$, $\underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(x-1)}}$ et $\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ donc intégrable. Poser $u = \sqrt{x^2 - 1}$ (justifier!) $I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$.

3. $\frac{m}{n\sqrt{n^2 - m^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{m}{n^2}$ donc (reste de) série AC.

Par comparaison intégrale : $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - m^2}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n^2 - m^2}} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - m^2}}$ puis $\int_{m+1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - m^2}} \leq \frac{S_m}{m} \leq$

$\int_m^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - m^2}}$ (CV par chgt de variable qui suit) ; on pose (justifier!) $x = mu$ et par encadrement, on arrive à

$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}$.