L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème dont les différentes parties sont indépendantes entre elles. Il est conseillé de ne pas passer plus d'une heure sur l'exercice.

EXERCICE

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Partie I : Trigonalisation

1. On note $D_1 = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et $D_2 = \ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3})$.

a) Montrer que D_1 est une droite vectorielle ; déterminer une base (u_1) de D_1 telle que $u_1 = (1, *, *)$ (ce qui signifie que u_1 est un vecteur dont la première coordonnée est 1).

b) Montrer que D_2 est une droite vectorielle ; déterminer une base (u_2) de D_2 telle que $u_2 = (*, 1, *)$.

c) Calculer $(A - 2I_3)^2$ et en déduire un vecteur $u_3 = (*, *, 1)$ tel que (u_2, u_3) forme une base de $\ker\left[(f - 2id_{\mathbb{R}^3})^2\right]$.

2. a) Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

c) Déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$.

3. Soit (v_1, v_2, v_3) une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; cette base n'est pas nécessairement la base $\mathcal{B}$ que vous avez trouvée précédemment. On pose $v_0 = v_1 + v_3$.

a) Montrer que $\mathcal{B}' = \left(v_0, f(v_0), f^2(v_0)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer $(f - id_{\mathbb{R}^3}) \circ (f - 2id_{\mathbb{R}^3})^2$ et en déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Partie II : Commutant de A et équation matricielle

On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'après la première partie, il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$ (l'expression exacte de cette matrice P n'est pas nécessaire pour traiter cette partie).
Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(B)$ le commutant de B, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M commutant avec B :

$$C(B) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ BM = MB\}.$$

1. Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $N = P^{-1}MP$, montrer que $AM = MA$ si et seulement si $TN = NT$.

2. Soit $N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que $TN = NT$ si et seulement si $\begin{cases} x_2 = x_3 = y_1 = z_1 = z_2 = 0 \\ \text{et} \\ y_2 = z_3 \end{cases}$.

3. En déduire que $C(T)$ est un espace vectoriel de dimension 3 dont vous donnerez une base.

4. Déterminer la dimension de $C(A)$ et montrer que $\left(I_3, A, A^2\right)$ est une base de $C(A)$.

Fin de l'exercice

Sommes de projecteurs orthogonaux de rang 1

(Inspiré, de loin, de Mines-Ponts PSI 2014 maths 1)

Dans ce problème, n désignera un entier naturel $\geqslant 2$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$. La famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On considère E un espace euclidien de dimension finie n. La notation id_E désigne l'endomorphisme identité de E. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E sera noté $(x|y)$ et la norme du vecteur x sera notée $\|x\|$.
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base de E, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ sera notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
On rappelle qu'un projecteur orthogonal de E est un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie les deux conditions

$$p \circ p = p \quad \text{et} \quad \ker(p) \perp \mathrm{Im}(p)$$

Partie I – Questions préliminaires sur la trace

On rappelle que si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sa trace, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est définie par

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver l'égalité $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

2. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = P(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
Rappeler la relation liant les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et P et en déduire la relation

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f))$$

On rappelle la définition de la trace d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \text{ où } \mathcal{B} \text{ est une base de } E$$

Il résulte donc de la question précédente que ce réel est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est écrite.

Partie II – Étude d'un exemple en dimension 3

Dans cette partie, on suppose $n = 3$ et que $E = \mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire canonique.
On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On notera f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. a) Déterminer des bases de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$

b) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f)$

c) Vérifier $\mathrm{Tr}(A) \geqslant \mathrm{rg}(A)$

2. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dans la suite, on pose $S = A' - E_{1,1}$, s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = S$ et $F = \mathrm{Im}(S)$

a) Comparer $\mathrm{Tr}(S)$ et $\mathrm{rg}(S)$

b) Justifier que $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormale de F.

c) On note u l'endomorphisme de F induit par s, défini par

$$u \; : \; \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & s(x) \end{array}$$

Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_F$ de F et en déduire que u est un automorphisme de F.

d) Déterminer un vecteur $w = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2$ de F, unitaire et tel que $(u^{-1}(w)|w) = 1$, où a et b sont deux scalaires positifs.

4. On note p_w la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur la droite $D_w = \text{Vect}\{w\}$.

a) Écrire la matrice P_w du projecteur p_w dans la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

b) On pose alors $Q = S - P_w$. Vérifier que Q est la matrice d'un projecteur orthogonal de rang 1 de $\mathbb{R}^3$

5. Conclure que f peut s'écrire comme la somme de 3 projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^3$.

Partie III – Généralités sur les projecteurs orthogonaux

Dans la suite du problème, on introduit les définitions suivantes : si $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que

- f est un endomorphisme **symétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|y) = (x|f(y))$$

- f est un endomorphisme symétrique **positif** s'il est symétrique et si

$$\forall x \in E, (f(x)|x) \geqslant 0$$

1. Soit p un projecteur de E, pas nécessairement orthogonal, donc tel que $p \circ p = p$

a) Montrer que $E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$ et $\text{Im}(p) = \ker(p - id_E)$.

b) Écrire la matrice de p dans une base adaptée à la décomposition $E = \ker(p) \oplus \ker(p - id_E)$ et en déduire

$$\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$$

2. Montrer que p est un projecteur orthogonal de E de rang 1 si et seulement si il existe un vecteur unitaire w tel que

$$\forall x \in E, p(x) = (w|x)w$$

3. Soit à nouveau p un projecteur quelconque de E. Pour les deux questions qui suivent, il pourra être intéressant d'utiliser la décomposition $E = \ker(p) \oplus \ker(p - id_E)$.

a) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

b) Montrer que si p est un projecteur orthogonal de E alors p est un endomorphisme symétrique positif de E.

4. Déduire des questions précédentes que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est la somme de k projecteurs p_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ orthogonaux de E : $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i$ alors

a) f est un endomorphisme symétrique positif de E

b) $\text{Tr}(f) \in \mathbb{N}$ et $\text{Tr}(f) \geqslant \text{rg}(f)$.

Partie IV – Étude de la réciproque

On considère dans cette partie un endomorphisme symétrique positif f de E tel que $\text{Tr}(f) \in \mathbb{N}$ et $\text{Tr}(f) \geqslant \text{rg}(f)$ et on souhaite démontrer que f peut s'écrire comme la somme d'un nombre fini de projecteurs orthogonaux de rang 1.

On admettra le résultat suivant : si s est un endomorphisme symétrique de E, alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E dans laquelle la matrice de s est diagonale

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

On supposera systématiquement avoir ordonné les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ de sorte que $\lambda_i \neq 0$ pour $i \leqslant r$ et $\lambda_i = 0$ pour $i \geqslant r + 1$, r étant un entier de $[\![1, n]\!]$.

1. Soit s un endomorphisme symétrique positif de E et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de s est la matrice diagonale précédente.

a) Montrer que $\ker(s) = \text{Vect}\{\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_n\}$ et $\text{Im}(s) = \text{Vect}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r\}$ et que $r = \text{rg}(f)$.

b) Pour $i \leqslant r$, calculer $(s(\varepsilon_i)|\varepsilon_i)$ et en déduire $\lambda_i > 0$

2. On suppose pour commencer que $\mathrm{Tr}(f) > \mathrm{rg}(f)$. On note $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

a) Justifier qu'il existe un indice $i_0 \in [\![1, r]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} > 1$

b) Vérifier $\mathrm{rg}(D - E_{i_0,i_0}) = \mathrm{rg}(D)$ et $\mathrm{Tr}(D - E_{i_0,i_0}) = \mathrm{Tr}(D) - 1$

c) On note q_i l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $E_{i,i}$. Prouver que q_i est un projecteur orthogonal de rang 1.

d) Déduire des questions qui précèdent qu'il existe des projecteurs orthogonaux $p_1, \dots, p_k$ tels qu'on puisse écrire $f = g + \sum_{i=1}^{k} p_i$ avec g un endomorphisme symétrique positif de E vérifiant $\mathrm{Tr}(g) = \mathrm{rg}(g)$. *Pour montrer que g est positif, on pourra utiliser la base $\mathcal{B}$ et la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.*

Dans la suite, on considèrera donc que f est un endomorphisme symétrique positif de E tel que $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{rg}(f)$ (qui sera donc un entier). On continue de noter $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

3. Montrer que si $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 1$ alors f est la somme de r projecteurs orthogonaux de rang 1.

On supposera donc dans la suite que les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, ne sont pas tous égaux à 1.

4. a) On note u l'endomorphisme de $F = \mathrm{Im}(f)$ induit par f, défini par

$$u : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ de F et en déduire que u est un automorphisme de F.

b) Justifier qu'il existe deux indices i et j dans $[\![1, r]\!]$ tels que $\lambda_i < 1 < \lambda_j$.

c) Prouver qu'il existe un vecteur $w = a\varepsilon_i + b\varepsilon_j$ unitaire et tel que $(u^{-1}(w)|w) = 1$. Les deux indices i et j étant tels que $\lambda_i < 1 < \lambda_j$.

d) Écrire P_w, la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de p_w, le projecteur orthogonal sur la droite $D_w = \mathrm{Vect}\{w\}$.

e) Montrer que $f - p_w$ est un endomorphisme symétrique positif de E tel que $\mathrm{rg}(f - p_w) = \mathrm{Tr}(f - p_w) = \mathrm{Tr}(f) - 1$.

5. Conclure