Dans cet exercice, on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall t > 0, g(t) = \frac{\ln(t)}{t}\, e^t$$

et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall x > 0, f(x) = \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, e^t\,\mathrm{d}t$$

1. Le graphe de f

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, préciser la valeur de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Justifier que si $t \in]0,1]$, on a $g(t) \leqslant \dfrac{\ln(t)}{t}$.
Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} \times \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

c) Montrer que, pour $t \geqslant 0$, on a $e^t \geqslant t$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

d) Tracer l'allure du graphe de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Des équivalents de f

a) Quelle est la limite, quand t tend vers 0, de $g(t) - \dfrac{\ln(t)}{t}(1+t)$?
En déduire que $\left[f(x) - \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}(1+t)\,\mathrm{d}t\right]$ admet une limite finie quand x tend vers 0.

b) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 0.

c) Justifier que, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}\, e^x + \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t) - 1}{t^2} e^t\,\mathrm{d}t$.

d) Montrer les deux inégalités suivantes, valables pour $x \geqslant 1$:

i) $\displaystyle\left|\int_1^{x^{2/3}} \frac{\ln(t)-1}{t^2} e^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(1 + \frac{2}{3}\ln(x)\right) e^{x^{2/3}}$

ii) $\displaystyle\left|\int_{x^{2/3}}^{x} \frac{\ln(t)-1}{t^2} e^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1+\ln(x)}{x^{4/3}}\, e^x$

e) A l'aide des dernières questions, déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Une autre fonction

Dans cette question, on note ϕ la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$:

$$\forall x \geqslant 1, \phi(x) = \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, e^t\,\mathrm{d}t.$$

a) Justifier que ϕ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.

b) Justifier que ϕ^{-1}, la réciproque de ϕ, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle à préciser.

c) Montrer qu'il existe une fonction h, définie sur $]0,1]$, <u>à valeurs dans $[1, +\infty[$</u>, et telle que

$$\forall x \in]0,1], \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} e^t\,\mathrm{d}t = \int_1^{h(x)} \frac{\ln(t)}{t} e^t\,\mathrm{d}t.$$

On donnera une expression de $h(x)$ en fonction de f et de ϕ^{-1}.

d) Préciser les variations de h sur $]0,1]$, $h(1)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$.