

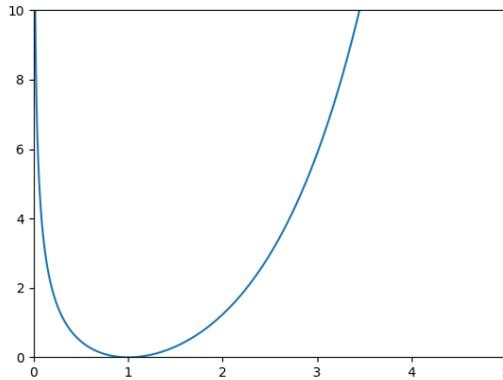
Correction du DM3

1. a) g est continue sur \mathbb{R}^{+*} donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ et $f'(x) = g(x) = \frac{\ln x}{x} e^x$. On en déduit que f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

b) Si $t > 0$, $e^t \geq 1$; de plus, avec $t \in]0, 1]$, on a $\frac{\ln t}{t} \leq 0$ donc $g(t) \leq \frac{\ln t}{t}$. On calcule $\int_1^x \frac{1}{t} \ln t \, dt = \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_1^x = \frac{1}{2} (\ln x)^2$. Enfin, si $x \in]0, 1]$ alors en intégrant l'inégalité initiale, on obtient $\int_x^1 g(t) \, dt \leq \int_x^1 \frac{\ln t}{t} \, dt$ puis $f(x) \geq \frac{1}{2} (\ln x)^2$, ce qui donne $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty$

c) On vérifie que $e^t \geq t$ sur \mathbb{R}^+ en étudiant la fonction $t \mapsto e^t - t$ (croissante sur \mathbb{R}^+ et nulle en 0). On en déduit $\frac{e^t}{t} \geq 1$ et si $t \geq 1$, $\ln t \geq 0$ puis $g(t) \geq \ln(t)$. Si $x \geq 1$, en intégrant cette inégalité, on obtient $f(x) \geq \int_1^x \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^x = x \ln x - x + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$

d)



2. a) On a $g(t) - \frac{\ln t}{t}(1+t) = \frac{\ln t}{t}(e^t - 1 - t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln t}{t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) - 1 - t \right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t \ln t}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ donc on obtient

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) - \frac{\ln t}{t}(1+t) = 0$$

La fonction $t \mapsto g(t) - \frac{\ln t}{t}(1+t)$ étant prolongeable par continuité au segment $[0, 1]$, on en déduit la limite $f(x) - \int_1^x \frac{\ln t}{t}(1+t) \, dt = \int_1^x \left[g(t) - \frac{\ln t}{t}(1+t) \right] \, dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} - \int_0^1 \left[g(t) - \frac{\ln t}{t}(1+t) \right] \, dt = I$.

b) On a alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \int_1^x \frac{\ln t}{t}(1+t) \, dt + I + o(1) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + x \ln(x) - x + 1 + I + o(1)$; comme $x \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o((\ln x)^2)$,

on en déduit $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} (\ln x)^2$

c) Il suffit de faire une IPP avec les deux fonctions u et $v \in \mathcal{C}^1$ sur \mathbb{R}^{+*} données par $u(x) = u'(x) = e^x$ et $v(x) = \frac{\ln x}{x}$ donc $v'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$.

d) i. Si $x \geq 1$ alors $\left| \int_1^{x^{2/3}} \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t \, dt \right| \leq \int_1^{x^{2/3}} \left| \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t \right| \, dt$ et si $t \in [1, x^{2/3}]$, on a $\left| \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t \right| \leq \frac{\ln t + 1}{t^2} e^t$ puis $\frac{\ln t + 1}{t^2} e^t \leq \left(1 + \frac{2}{3} \ln x \right) e^t$ donc $\left| \int_1^{x^{2/3}} \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t \, dt \right| \leq \left(1 + \frac{2}{3} \ln x \right) \int_1^{x^{2/3}} e^t \, dt = \left(1 + \frac{2}{3} \ln x \right) (e^{x^{2/3}} - e)$

donc $\left| \int_1^{x^{2/3}} \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t \, dt \right| \leq \left(1 + \frac{2}{3} \ln x \right) e^{x^{2/3}}$

ii. On procède de même : $\left| \int_{x^{2/3}}^x \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t \, dt \right| \leq \int_{x^{2/3}}^x \left| \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t \right| \, dt \leq \int_{x^{2/3}}^x \frac{\ln t + 1}{t^2} e^t \, dt \leq \int_{x^{2/3}}^x \frac{\ln x + 1}{(x^{2/3})^2} e^t \, dt$

et enfin $\left| \int_{x^{2/3}}^x \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t \, dt \right| \leq \frac{\ln x + 1}{x^{4/3}} e^x$

e) Comme $\left(1 + \frac{2}{3} \ln x\right) e^{x^{2/3}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} \ln x e^{x^{2/3}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{\ln x}{x} e^x\right)$ car $\frac{\ln x e^{x^{2/3}}}{\frac{\ln x}{x} e^x} = \frac{1}{x} e^{-x(1-x^{-1/3})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{\ln x + 1}{x^{4/3}} e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^{4/3}} e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{\ln x}{x} e^x\right)$, on en déduit $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x} e^x}$

3. a) ϕ est continue et strictement croissante sur $]1, +\infty[$ car $\phi'(x) = \frac{\ln x}{x} e^x > 0$ sur $]1, +\infty[$ donc ϕ réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\left[\phi(1), \lim_{+\infty} \phi\right[= \mathbb{R}^{+*}$.

b) Comme ϕ est \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$ et ϕ' ne s'annule pas sur cet intervalle, $\boxed{\phi^{-1}$ est \mathcal{C}^∞ sur $\phi(]1, +\infty[) = \mathbb{R}^+$ }

c) On cherche h telle que $f(x) = \phi(h(x))$; il suffit donc de prendre $\boxed{h(x) = \phi^{-1} \circ f(x)}$ (et c'est d'ailleurs la seule possibilité).

d) f est décroissante sur $]0, 1]$, à valeurs dans \mathbb{R}^+ , ϕ croissante sur $]1, +\infty[$ donc ϕ^{-1} est croissante sur \mathbb{R}^+ ; par composition, \boxed{h} est décroissante sur $]0, 1]$

On a $h(1) = \phi^{-1} \circ f(1) = \phi^{-1}(0) = 1$ et comme $\lim_{+\infty} \phi = +\infty$, on a aussi $\lim_{+\infty} \phi^{-1} = +\infty$, donc, par composition des limites $\boxed{\lim_0 h = +\infty}$