PSI2 pour le lundi 16 octobre 2023

DM4

(Extrait de E3A PC 2010 maths B)

---

1. Calculs préliminaires

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$

b) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x}$$

Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

a) Montrer que I existe.

b) Pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose

$$I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Montrer, et justifier l'existence des intégrales, que

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2} = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

c) En déduire qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telles que

$$I(a) = C\int_a^{3a} f(x)\,\mathrm{d}x + D$$

d) Déterminer la valeur de I.

3. En utilisant les mêmes idées, justifier la convergence et calculer la valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$