Correction du DM4

Extrait de E3A PC 2010 maths B

---

1. a) $\sin 3x = \operatorname{Im}\left[(\cos x + i\sin x)^3\right] = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x = \boxed{3\sin x - 4\sin^3 x}$

b) $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{x^2} \underset{0}{\sim} -\dfrac{x}{6}$ donc on prolonge f par continuité en posant $f(0) = 0$. $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{6}$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{6}$. Pour $x \neq 0$, $x^2 \neq 0$ donc, par quotient, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2} - 2\dfrac{\sin x - x}{x^3}$. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin x - x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$; on en déduit $\lim\limits_{0} f' = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{6} = f'(0)$ donc f' est continue en 0 et $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

2. a) $x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{x^2} = 0$ donc $x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{x^2}$ est intégrable sur $]0,1]$.
$\left|\dfrac{\sin^3 x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{I \text{ existe}}$

b) $x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{x^2}$ est continue sur $[a,+\infty[$ et $\left|\dfrac{\sin 3x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ donc $x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{x^2}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$.
On pose $u = 3x$: la fonction $u \mapsto \dfrac{u}{3}$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[3a,+\infty[$ sur $[a,+\infty[$ (ce qui assure l'absolue convergence de la deuxième intégrale) : $\boxed{\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u}$

c) On a :

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_a^{+\infty} \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\left[\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{3}{4}\int_a^{3a} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\int_a^{3a} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int_a^{3a} \frac{\mathrm{d}x}{x}
\end{aligned}$$

et comme $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln 3$, on obtient $\boxed{I(a) = \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_a^{3a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \dfrac{3}{4}\ln 3}$

d) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, on a $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_a^{3a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$: en effet, f est intégrable sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_a^{3a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{3a}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[a\to 0]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On a donc $\boxed{I = \lim\limits_{a\to 0} I(a) = \dfrac{3}{4}\ln 3}$

3. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sin^5 x}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc g est intégrable sur $]0,1]$ et $|g(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ donc g est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour le calcul, on procède de même : $J = \lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\sin^5 x = \dfrac{1}{16}(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x))$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin(kx)}{x^2}$ sont intégrables sur $[a,+\infty[$ (avec $a > 0$) car elles sont continues sur $[a,+\infty[$ et $\left|\dfrac{\sin(kx)}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$; on a donc $J(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin^5(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\left[\int_a^{+\infty} \frac{\sin(5x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - 5\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + 10\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right]$. On pose $u = 5x$ dans la première intégrale et $u = 3x$ dans la deuxième (les deux fonctions $u \mapsto \dfrac{u}{5}$ et $u \mapsto \dfrac{u}{3}$ sont $\mathcal{C}^1$, bijectives et strictement croissantes de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$) et on obtient

$$\begin{aligned}
16J(a) &= 5\int_{5a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u - 15\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u + 10\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -5\int_{3a}^{5a} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u + 10\int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= -5\left(\int_{3a}^{5a} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{3a}^{5a} \frac{\mathrm{d}u}{u}\right) + 10\left(\int_a^{3a} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_a^{3a} \frac{\mathrm{d}u}{u}\right) \\
&= -5\int_{3a}^{5a} f(u)\,\mathrm{d}u + 10\int_a^{3a} f(u)\,\mathrm{d}u - 5\ln\left(\frac{5}{3}\right) + 10\ln 3
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_{3a}^{5a} f(u)\,\mathrm{d}u = \lim\limits_{a\to 0} \int_a^{3a} f(u)\,\mathrm{d}u = 0$, on obtient $\boxed{J = \dfrac{1}{16}(15\ln 3 - 5\ln 5)}$