(Extrait de Mines-Ponts PSI 2017 maths 2)

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{C}$, le corps des complexes, pour corps de base.
Étant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et 0_n sa matrice nulle).
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
Un endomorphisme u de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G,\ u(F) \subset G \ \text{ et } \ u(G) \subset F$$

Étant donnés deux endomorphismes u et v de E, on dit que v est **semblable** à u lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \varphi^{-1} \circ v \circ (\varphi^{-1})^{-1}$, si bien que u est semblable à v.
On dit que u est **de carré nul** lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E.
On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite **de carré nul** lorsque $A^2 = 0$.
L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

- **(C1)** l'endomorphisme u est échangeur ;
- **(C2)** il existe $a, b \in \mathcal{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$;
- **(C3)** les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

A. Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et un endomorphisme u de E.

1. Montrer que si u vérifie la condition **(C3)** alors u est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose u de trace nulle et de déterminant non nul.
On choisit un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = -\det(u)$.

2. Montrer que $u^2 = \delta^2 id_E$; en déduire $E = \ker(u - \delta id_E) \oplus \ker(u + \delta id_E)$ et préciser la dimension de ces deux sous-espaces vectoriels.
3. Expliciter, à l'aide de $x_+ \in \ker(u + \delta id_E)$ et $x_- \in \ker(u - \delta id_E)$ non nuls, une droite vectorielle D telle que $u(D) \not\subset D$ et en déduire que u est échangeur.

B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On considère dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$$

1. Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.
2. On considère dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale par blocs

$$D = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix}$$

   Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis DMD^{-1}, et en déduire que M est semblable à $-M$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On suppose que u est échangeur et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

3. On suppose ici F et G tous deux non nuls.
   On se donne une base $(f_1, \dots, f_n)$ de F et une base $(g_1, \dots, g_p)$ de G.
   La famille $B = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est donc une base de E.
   Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice u dans B.
4. Déduire des questions précédentes que u vérifie **(C2)** et **(C3)**. *On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces F ou G est nul.*

C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un *automorphisme* d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

1. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Comparer $\ker(f)$ à $\operatorname{Im}(f)$ et en déduire

$$\dim(\ker(f)) \geqslant \frac{1}{2}\dim(E)$$

2. Démontrer que $E = \ker(a) \oplus \ker(b)$, et que $\ker(a) = \operatorname{Im}(a)$ et $\ker(b) = \operatorname{Im}(b)$.

3. En déduire que u est échangeur.

D. Intermède : un principe de décomposition

On se donne dans cette partie un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme f de E.
On se donne un nombre complexe arbitraire λ.
On pose $v = f - \lambda \mathrm{I}_E$.

1. Montrer que la suite $(\ker(v^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que

$$\forall k \geqslant p,\ \ker(v^k) = \ker(v^p)$$

On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace vectoriel de la forme $\ker(v^k)$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'alors

$$\ker(v^p) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(v^k)$$

et que p peut être choisi parmi les entiers pairs.

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier naturel pair p donné par la question précédente et l'on pose

$$E^c_\lambda(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(v^k) = \ker(v^p)$$

On notera que $E^c_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Montrer que $E^c_\lambda(f) = \ker(v^{2p})$ et en déduire

$$E = E^c_\lambda(f) \oplus \operatorname{Im}(v^p)$$

Montrer en outre que les sous-espaces vectoriels $E^c_\lambda(f)$ et $\operatorname{Im}(v^p)$ sont tous deux stables par f.

4. Montrer que l'endomorphisme induit par $f - \lambda \mathrm{I}_E$ sur $\operatorname{Im}(v^p)$ est injectif.

5. Montrer que l'endomorphisme f_λ induit par f sur $E^c_\lambda(f)$ vérifie $\ker(f_\lambda - \mu \mathrm{I}_E) = \{0\}$ pour tout $\mu \neq \lambda$.