Correction du DS3

Problème 1 : (d'après École de l'air MP 2002 maths 1)

Partie I

1. a) $t \mapsto \dfrac{1}{(t+x)\sqrt{t}}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $x>0$ donc $t+x \neq 0$ si $t \in \mathbb{R}^{+*}$. De plus $\dfrac{1}{(t+x)\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{xt^{1/2}}$ et $\dfrac{1}{(t+x)\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$; on en déduit que $\boxed{t \mapsto \dfrac{1}{(t+x)\sqrt{t}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$

b) L'application $u \mapsto u^2$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{(x+u^2)u}$ puis $g(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+(u/\sqrt{x})^2} = \frac{2}{\sqrt{x}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{x}}\right]_{u=0}^{u=+\infty}$ et $\boxed{g(x) = \dfrac{\pi}{\sqrt{x}} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^{+*}}$

2. a) Si $x>0$, $t \mapsto \dfrac{1}{(t+x)\sqrt{1+t}} \in \mathcal{CM}^0(\mathbb{R}^+)$, $\dfrac{1}{(t+x)\sqrt{1+t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$, $\boxed{t \mapsto \dfrac{1}{(t+x)\sqrt{1+t}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+}$

b) L'application $u \mapsto \dfrac{1}{u^2} - 1$ est $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc, par changement de variable, $g(x) = \displaystyle\int_1^0 \frac{-2/u^3}{(x-1+1/u^2)} u\,\mathrm{d}u$, puis $\boxed{g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+(x-1)u^2}\,\mathrm{d}u}$

c) Pour $x>1$, on a $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}\Big[\arctan\big(u\sqrt{x-1}\big)\Big]_{u=0}^{u=1}$ donc $\boxed{g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}\arctan\sqrt{x-1} \text{ si } x>1}$

Pour $x \in]0,1[$, on a $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-(u\sqrt{1-x})^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-u\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1+u\sqrt{1-x}}\right)\mathrm{d}u$ donc on en déduit $\boxed{g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right) \text{ pour } x \in]0,1[}$ Enfin on aussi $\boxed{g(1) = \displaystyle\int_0^1 2\,\mathrm{d}u = 2}$

d) Comme $\arctan u \underset{0}{\sim} u$, on a $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = 2 = g(1)$ donc g est continue à droite en 1. De l'autre côté, si $u<0$, on a $g(1-u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}}[\ln(1+\sqrt{u}) - \ln(1-\sqrt{u})] \underset{u\to0}{=} \dfrac{1}{\sqrt{u}}\left[\sqrt{u} - (-\sqrt{u}) + o(\sqrt{u})\right]$ donc $\lim\limits_{1^-} g(x) = 2 = g(1)$ donc g est continue à gauche en 1. Comme g est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ par les théorèmes généraux, on en déduit que $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}}$

Partie II

1. $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t+z}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car si $t+z=0$ alors $z=-t \in \mathbb{R}^-$, ce qui est absurde si $z \in \Omega$. De plus, $\dfrac{f(t)}{t+z} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{z}f(t)$ donc $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t+z}$ est intégrable sur $]0,1]$ et $\dfrac{f(t)}{t+z} \underset{t\to+\infty}{=} o(f(t))$ donc $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t+z}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. On en déduit que $\boxed{g \text{ est définie sur } \Omega}$

2. a) f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $\boxed{F_a \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } F_a' = f}$

b) Par définition d'une intégrale convergente, F_a admet des limites finies en 0 et en $+\infty$: $\lim\limits_0 F_a = -\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{+\infty} F_a = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction F_a est donc bornée au voisinage de 0 et $+\infty$, ie il existe $M_1>0$ tel que $|F_a| \leqslant M_1$ sur des intervalles $]0,\alpha]$ et $[\beta,+\infty[$; comme F_a est continue sur le segment $[\alpha,\beta]$, elle y est également bornée : $\forall t \in [\alpha,\beta], |F_a(t)| \leqslant M_2$. On a alors $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, |F_a(t)| \leqslant M_1 + M_2$ et $\boxed{F_a \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^{+*}}$

c) Tout reste valable car comme $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (constante), on a $F_0(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + F_1(x)$.

3. Pour $a \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{F_a(t)}{(t+z)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$; de plus $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{F_a(t)}{(t+z)^2} = -\dfrac{1}{z^2}\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ est finie et comme F_a est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $\dfrac{F_a(t)}{(t+z)^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que $\boxed{t \mapsto \dfrac{F_a(t)}{(t+z)^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$

4. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t+z}$ et F_1 sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; de plus, $\lim\limits_0 \dfrac{F_1(t)}{t+z} = -\dfrac{1}{z}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{F_1(t)}{t+z} = 0$ sont finies donc, par IPP, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+z}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F_1(t)}{(t+z)^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Comme, d'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F_1(t)}{(t+z)^2}\,\mathrm{d}t$ converge, on en déduit que $\boxed{g \text{ est définie sur } \Omega}$

Partie III

1. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t+z}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,1]$ donc $g(z)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t+z}\,\mathrm{d}t$ converge. De plus $\dfrac{f(t)}{t+z} = h(t)\dfrac{t}{t+z} = h(t) - z\dfrac{h(t)}{t+z}$. Comme h est par hypothèse intégrable sur $[1,+\infty[$ et $z \neq 0$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t+z}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{h(t)}{t+z}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$

b) On raisonne comme dans la partie **II** : comme h est $\mathcal{C}^0$ sur $[1,+\infty[$, H est $\mathcal{C}^1$ donc $t \mapsto \dfrac{H(t)}{(t+z)^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[1,+\infty[$. De plus H admet une limite finie en $+\infty$ puisque h est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc H est bornée sur $[1,+\infty[$. On a donc $\dfrac{H(t)}{(t+z)^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\boxed{t \mapsto \dfrac{H(t)}{(t+z)^2} \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[}$

c) Le raisonnement (IPP) fait à la question **II.3**, avec la fonction h au lieu de f, prouve que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{h(t)}{t+z}\,\mathrm{d}t$ converge donc, avec **III.1.a**, $\boxed{g \text{ est définie sur } \Omega}$

2. a) La fonction nulle est lipschitzienne et intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $0 \in E$.
Si f et g sont dans E et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ alors il existe k_1 et k_2 tels que, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $|f(x)-f(y)| \leqslant k_1|x-y|$ et $|g(x)-g(y)| \leqslant k_2|x-y|$; on en déduit $|(\alpha f(x)+\beta g(x)) - (\alpha f(y)+\beta g(y))| \leqslant (|\alpha|k_1 + |\beta|k_2)|x-y|$, par inégalité triangulaire, donc $\alpha f + \beta g$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$. D'autre part, $t \mapsto \alpha\dfrac{f(t)}{t} + \beta\dfrac{g(t)}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ puisque l'ensemble des fonctions intégrables sur $[1,+\infty[$ est un espace vectoriel. On en déduit que $\boxed{E \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{CM}^0(\mathbb{R}^+)}$

b) La linéarité de T découle de la linéarité de l'intégrable : $T(\alpha f+\beta g)(z) = \alpha T(f)(z) + \beta T(g)(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

3. a) Comme, pour $t \geqslant a$, on a $\varphi(t) = \dfrac{2y(t-a)}{(t-a)^2+y^2}$, et $\varphi(t) = -\dfrac{2y(t-a)}{(t-a)^2+y^2}$ sur $[0,a]$, une primitive de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $\boxed{\phi : t \mapsto \begin{cases} y\ln\left[(t-a)^2+y^2\right] & \text{si } t \geqslant a \\ -y\ln\left[(t-a)^2+y^2\right] & \text{si } t \in [0,a] \end{cases}}$

b) On a $\Delta(a) = \left|\displaystyle\int_0^{2a} (f(t)-f(a))\left(\frac{1}{t-a+iy} - \frac{1}{t-a-iy}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^{2a} |f(t)-f(a)|\left|\frac{1}{t-a+iy} - \frac{1}{t-a-iy}\right|\mathrm{d}t$
et, f étant k-lipschitzienne, $\Delta(a) \leqslant k\displaystyle\int_0^{2a} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t = k\left(\Big[-y\ln\left[(t-a)^2+y^2\right]\Big]_0^a + \Big[y\ln\left[(t-a)^2+y^2\right]\Big]_a^{2a}\right)$
donc $\Delta(a) \leqslant 2k(y\ln(a^2+y^2) - 2y\ln(y))$ donc, par encadrement et avec $\lim\limits_{y\to0} y\ln(y) = 0$, $\boxed{\lim\limits_{y\to0}\Delta(a) = 0}$

c) Par IPP, mêmes justifications qu'en **II.3**, H_{2a} étant la primitive nulle en $2a$ de h puisque h est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

d) On vérifie que $\dfrac{a-iy}{(t-a+iy)^2} - \dfrac{a+iy}{(t-a-iy)^2} = \dfrac{-4iay(t-a)}{((t-a)^2+y^2)^2} - iy\left(\dfrac{1}{(t-a+iy)^2} + \dfrac{1}{(t-a-iy)^2}\right)$ donc, si $t \geqslant a$, $\left|\dfrac{a-iy}{(t-a+iy)^2} - \dfrac{a+iy}{(t-a-iy)^2}\right| \leqslant \dfrac{4ay(t-a)}{((t-a)^2+y^2)^2} + \dfrac{2y}{((t-a)^2+y^2)^2} \leqslant \dfrac{4ay}{(t-a)^3} + \dfrac{2y}{(t-a)^4}$.
Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^3}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^4}$ étant intégrables sur $[2a,+\infty[$, on en déduit

$$\int_{2a}^{+\infty}\left|\frac{a-iy}{(t-a+iy)^2} - \frac{a+iy}{(t-a-iy)^2}\right|\mathrm{d}t \leqslant 2y\left(\int_{2a}^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{(t-a)^3} + \int_{2a}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^4}\right) \xrightarrow[y\to0^+]{} 0.$$

La fonction H_{2a} est bornée sur $[2a,+\infty[$ comme vu en **II.1.b** ($|H_{2a}| \leqslant M$), on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{2a}^{+\infty} f(t)\left(\frac{1}{t-a+iy} - \frac{1}{t-a-iy}\right)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_{2a}^{+\infty} H_{2a}(t)\left(\frac{a-iy}{(t-a+iy)^2} - \frac{a+iy}{(t-a-iy)^2}\right)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{2a}^{+\infty}\left|H_{2a}(t)\left(\frac{a-iy}{(t-a+iy)^2} - \frac{a+iy}{(t-a-iy)^2}\right)\right|\mathrm{d}t \leqslant M\int_{2a}^{+\infty}\left|\frac{a-iy}{(t-a+iy)^2} - \frac{a+iy}{(t-a-iy)^2}\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

donc $\boxed{\lim\limits_{y\to0^+}\displaystyle\int_{2a}^{+\infty} f(t)\left(\frac{1}{t-a+iy} - \frac{1}{t-a-iy}\right)\mathrm{d}t = 0}$

e) On a $\displaystyle\int_0^{2a}\left(\frac{1}{t-a+iy} - \frac{1}{t-a-iy}\right)\mathrm{d}t = \frac{-2i}{y}\int_0^{2a}\frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t-a}{y}\right)^2} = -2i\left[\arctan\left(\frac{t-a}{y}\right)\right]_0^{2a}$ donc, on en déduit $\displaystyle\int_0^{2a}\left(\frac{1}{t-a+iy} - \frac{1}{t-a-iy}\right)\mathrm{d}t = -4i\arctan\frac{a}{y} \xrightarrow[y\to0^+]{} \boxed{-2i\pi}$

Par relation de Chasles et avec **III.3.b** et **III.3.d**, on obtient
$\lim_{y\to 0^+}\left[g(-a+iy)-g(-a-iy)-\int_0^{2a} f(a)\left(\frac{1}{t-a+iy}-\frac{1}{t-a-iy}\right)\,\mathrm{d}t\right]=0$ donc, d'après la première limite de cette question, $\boxed{\lim_{y\to 0^+} g(-a+iy)-g(-a-iy)=-2i\pi f(a)}$

f) Si $f\in\ker(T)$ alors $g(z)=0$ pour tout $z\in\Omega$ donc $g(-a+iy)=g(-a-iy)=0$ pour tout $a>0$ et $y\neq 0$. Par différence, on en déduit $g(-a+iy)-g(-a-iy)=0$ puis si $y\to 0^+$, $-2i\pi f(a)=0$. Ceci étant valable pour tout $a>0$, la fonction f est nulle et $\boxed{\ker(T)=\{0\}\text{ et }T\text{ est injective}}$

Problème 2 : (d'après CCP MP 2013 maths 2)
Partie I

1. a) Si $a\in T_1(\mathbb{R})$ alors il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $a=b^2$ donc $a\in\mathbb{R}^+$. Réciproquement, si $a\in\mathbb{R}^+$ alors $a=\left(a^{1/n}\right)^n$ donc $a\in T_1(\mathbb{R})$. On a donc bien $\boxed{T_1(\mathbb{R})=\mathbb{R}^+}$

b) On a $\boxed{z^n=re^{i\theta}\text{ si et seulement si }\exists k\in[\![0,n-1]\!]\,,z=r^{1/n}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}}$

c) Si $z=0$ alors $z=0^n$; si $z\neq 0$ alors on il existe $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$ tels que $z=re^{i\theta}$ donc $z=\left(r^{1/n}e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n$ donc $\boxed{T_1(\mathbb{C})=\mathbb{C}}$

2. a) Si $A\in T_p(\mathbb{K})$ alors pour $n\in\mathbb{N}^*$, il existe $B\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $A=B^n$, on a alors $\det(A)=\det(B)^n$; ceci étant valable pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a bien $\boxed{\det(A)\in T_1(\mathbb{K})}$

b) Il suffit de trouver une matrice de déterminant strictement négatif ; par exemple $\boxed{\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{ n'est pas TP}\mathbb{R}}$

3. Si $A=B^2$ alors A et B commutent ; on vérifie que $AB=BA$ si et seulement si $c=d=0$, ie si et seulement si B est aussi diagonale. On a alors $A=B^2$ si et seulement si $a^2=-1$ et $d^2=-2$; il n'y pas de solutions dans $\mathbb{R}$ donc $\boxed{A=B^2\text{ n'a pas de solution dans }M_2(\mathbb{R})}$ Par contre $\det(A)=2\in T_1(\mathbb{R})$ donc $\det(A)\in T_1(\mathbb{R})$ est une condition nécessaire pour que A soit TP$\mathbb{R}$ mais cette condition n'est pas suffisante.

On pouvait aussi vérifier directement $A=B^2\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=-1\\b(a+d)=0\\c(a+d)=0\\bc+d^2=-2\end{cases}$ et vérifier que ce système n'a pas de solution : si $b=0$ ou $c=0$, $a^2+bc=-1$ est impossible donc $b\neq 0$ et $c\neq 0$; on en déduit $a=-d$ ce qui rend les lignes $a^2+bc=-1$ et $d^2+bc=-2$ incompatibles.

4. a) On vérifie $\ker(A)=\mathrm{Vect}\{u_0\}$ avec $u_0=(0,0,1)$, $\ker(A-2I_3)=\mathrm{Vect}\{u_2\}$ avec $u_2=(1,0,1)$ et $\ker(A-4I_3)=\mathrm{Vect}\{u_4\}$ avec $u_4=(1,1,0)$. Si on pose $P=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u_0,u_2,u_4)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ alors $\det(P)=1$ donc P est inversible et $\mathcal{B}=(u_0,u_2,u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On en déduit $\mathbb{R}^3=\mathrm{Vect}\{u_0\}\oplus\mathrm{Vect}\{u_2\}\oplus\mathrm{Vect}\{u_4\}$, ie $\boxed{\mathbb{R}^3=\ker(A)\oplus\ker(A-2I_3)\oplus\ker(A-4I_3)}$

b) Par construction des vecteurs u_0, u_2 et u_4, on a $f_A(u_0)=0$, $f_A(u_2)=2u_2$ et $f_A(u_4)=4u_4$ donc la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice cherchée. Il suffit donc de prendre $\boxed{P=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}}$

c) On vérifie $A=B^n$ si on choisit $B=P\mathrm{diag}\left(0,2^{1/n},4^{1/n}\right)P^{-1}$ donc $\boxed{A\text{ est TP}\mathbb{R}}$

5. a) $A-I_p$ et $A-2I_p$ commutent, comme toutes les matrices introduites qui sont des polynômes en A, donc $\boxed{N^2=(A-I_p)^2(A-2I_p)^2=0}$

b) On a $P_1=2I_p-A-N=(2I_p-A)+(2I_p-A)(A-I_p)=(2I_p-A)(I_p+A-I_p)$ donc $\boxed{P_1=A(2I_p-A)}$

De même, $P_2=A+N-I_p=(A-I_p)+(A-I_p)(A-2I_p)=(A-I_p)(I_p+A-2I_p)$ donc $\boxed{P_2=(A-I_p)^2}$

Et enfin, $\boxed{P_1+P_2=I_p}$ de façon évidente.

c) On en déduit $P_1P_2=A(2I_p-A)(A-I_p)^2=0$ et, par commutativité de P_1 et P_2 qui sont des polynômes en A, $\boxed{P_1P_2=P_2P_1=0}$

Comme $P_2=I_p-P_1$, on a $0=P_1P_2=P_1(I_p-P_1)=P_1-P_1^2$ donc $\boxed{P_1^2=P_1\text{ et }P_2^2=P_2}$ de la même façon.

d) Comme P_1 et P_2 commutent, la formule du binôme donne $B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{(n-k)/n} P_1^k P_2^{n-k}$ et comme $P_1P_2 = 0$, seuls les termes $k = 0$ et $k = n$ sont non nuls, donc $B^n = 2P_2^n + P_1^n = P_1 + 2P_2$ donc $\boxed{B^n = D \text{ et } D \text{ est TP}\mathbb{R}}$

e) $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ donc $D\left(P_1 + \frac{1}{2}P_2\right) = P_1^2 + 2 \times \frac{1}{2}P_2^2 = P_1 + P_2 = I_p$; $\boxed{D \text{ est inversible et } D^{-1} = P_1 + \frac{1}{2}P_2}$

f) Comme D^{-1} et N commutent (toujours des polynômes en A), avec la formule du binôme à nouveau, on a $C^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k} D^{-k}N^k$ et comme $N^2 = 0$, il reste $C^n = I_p - n\frac{1}{n}D^{-1}N = I_p - D^{-1}N$.

On vérifie ensuite $A = D - N = D\left(I_p - D^{-1}N\right) = B^nC^n = (BC)^n$ toujours par commutativité des polynômes en A. Ainsi, $\boxed{A \text{ est TP}\mathbb{R}}$

6. a) Si $N = M^n$ et $N^r = 0$ alors $M^{rn} = (M^n)^r = N^r = 0$ donc $\boxed{M \text{ est nilpotente}}$

b) Comme vu en cours, il existe $k \leqslant p$ tel que $\ker(N^k) = \ker(N^{k+1})$, puis $\forall h \in \mathbb{N}, \ker(N^{k+h}) = \ker(N^k)$ par récurrence sur h. Comme $N^r = 0$ et $r + p \geqslant k$, on a $\ker(N^k) = \ker(N^{r+p}) = \ker(0) = \mathbb{K}^p$ donc $N^k = 0$ et, avec $k \leqslant p$, $N^p = N^k \times N^{p-k}$ donc $\boxed{N^p = 0}$

c) Il existe M telle que $N = M^p$; avec **I.6.a**, M est nilpotente donc, avec **I.6.b**, $M^p = 0$ ce qui donne $N = 0$. Réciproquement $0 = (0)^n$ donc la seule matrice nilpotente TP$\mathbb{K}$ est $\boxed{\text{la matrice nulle}}$

Partie II

1. a) On a $V = X^pQ + R$ avec $\deg(R) \leqslant p - 1$ donc, pour $x \neq 0$, $\frac{V(x)}{x^p} = Q(x) + \frac{R(x)}{x^p}$. Si on suppose $R \neq 0$ alors on peut écrire $R = \sum_{j=k}^{p-1} \alpha_j X^j$ avec $\alpha_k \neq 0$. On a alors $\left|\frac{R(x)}{x^p}\right| \underset{x\to 0}{\sim} \frac{|\alpha_k|}{|x|^{p-k}} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$, ce qui est absurde. On a donc $R = 0$, ce qui signifie que $\boxed{X^p \text{ divise } Q}$

Remarque : pour obtenir cette conclusion, il suffirait d'avoir $V(x) = o\left(x^{p-1}\right)$.

b) On écrit le développement limité de $(1 + x)^{1/n}$ à l'ordre p en 0 sous la forme $(1 + x)^{1/n} \underset{x\to 0}{=} P_n(x) + o(x^p)$ et en élevant à la puissance n, on obtient $1 + x \underset{x\to 0}{=} (P_n(x) + o(x^p))^n = (P_n(x))^n + o(x^p)$.

En appliquant la première question de cette partie au polynôme $V = 1 + X - P_n^n$, on en déduit que X^p divise $1 + X - P_n^n$ donc $\boxed{\exists Q \in \mathbb{R}[X], 1 + X = U^n + X^p \times Q}$

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_p + N = U(N)^n + N^pQ(N) = U(N)^n$ donc $\boxed{I_p + N \text{ est TP}\mathbb{K}}$

3. a) Si $A = B^n$ alors $AB = B^{n+1} = BA$.

On note $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \lambda_2 I_{p_2} + N_2, \ldots, \lambda_k I_{n_k} + N_k)$ et on commence par écrire $B = PMP^{-1}$ et on vérifie $A = B^n$ si et seulement si $D = M^n$. En écrivant $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ par blocs (avec des blocs de même taille que ceux de D), on vérifie que $DM = MD$ (qui équivaut à $AB = BA$) ce qui donne $\lambda_i M_{i,j} = \lambda_j M_{i,j}$ donc, les λ_i étant distincts, on a $M_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Ainsi M est elle aussi diagonale par blocs et peut s'écrire $M = \mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_k)$ pour simplifier. On vérifie alors que $A = B^n$ si et seulement si $D = M^n$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, k]\!], \lambda_i I_{p_i} + N_i = M_i^n$. En résumé, $\boxed{A \text{ est TP}\mathbb{C} \text{ si et seulement si les blocs } \lambda_i I_{p_i} + N_i \text{ sont TP}\mathbb{C}}$

b) Si $\lambda \neq 0$ alors il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda = \mu^n$ et on peut écrire $\lambda I_p + N = \lambda(I_p + \mu^{-1}N)$. On vérifie que $\mu^{-1}N$ reste nilpotente donc, d'après **II.2**, $I_p + \mu^{-1}N$ est TP$\mathbb{C}$ donc peut s'écrire $I_p + \mu^{-1}N = B^n$ ce qui donne $\lambda I_p + N = (\mu B)^n$ est donc TP$\mathbb{C}$ aussi.

Par contre, si $\lambda = 0$, $\lambda I_p + N = N$ est nilpotente donc n'est TP$\mathbb{C}$ que si $N = 0$ d'après **I.6**.

En conclusion $\boxed{A \text{ est TP}\mathbb{C} \text{ si et seulement si } (\forall i \in [\![1, k]\!], \lambda_i = 0 \Rightarrow N_i = 0)}$

En fait les λ_i sont tous non nuls si et seulement si A est inversible et les λ_i étant distincts, la condition $\lambda_i = 0$ ne peut se produire que pour au maximum un indice i.