Correction du DM5

(Extrait de Mines-Ponts PSI 2017 maths 2)

Partie A :

1. Il existe φ tel que $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ donc $-\operatorname{Tr}(u) = \operatorname{Tr}\left(\varphi \circ (u \circ \varphi^{-1})\right) = \operatorname{Tr}\left((u \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi\right) = \operatorname{Tr}(u)$ et $\boxed{\operatorname{Tr}(u) = 0}$

2. La matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$; on a alors $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{pmatrix} = \delta^2 I_2$ car $\det(u) = -(a^2+bc)$.

Soit $x \in E$, on suppose que x peut se décomposer sous la forme $x = y + z$ avec $u(y) = \delta y$ et $u(z) = -\delta z$; on a alors $u(x) = \delta(y-z)$ donc $y = \frac{1}{2\delta}(\delta x + u(x))$ et $z = \frac{1}{2\delta}(\delta x - u(x))$, car $\delta \neq 0$. La décomposition de x est donc unique si elle existe. Pour $x \in E$, on pose $y = \frac{1}{2\delta}(\delta x + u(x))$ et $z = \frac{1}{2\delta}(\delta x - u(x))$ et on vérifie $y + z = x$, puis $u(y) = \frac{1}{2\delta}(\delta u(x) + u^2(x)) = \frac{1}{2\delta}(\delta u(x) + \delta^2 x) = \frac{1}{2}(\delta x + u(x)) = \delta y$ donc $y \in \ker(u - \delta id)$, et enfin $u(z) = \frac{1}{2\delta}(\delta u(x) - u^2(x)) = \frac{1}{2\delta}(\delta x - \delta^2 x) = -\frac{1}{2}(\delta x - u(x)) = -\delta z$ donc $z \in \ker(u + \delta id)$. On en déduit $\boxed{E = \ker(u - \delta id) \oplus \ker(u + \delta id)}$

Comme $\dim(E) = 2$, on a $\dim(\ker(u - \delta id)) \in \{0, 1, 2\}$. Si $\dim(\ker(u - \delta id)) = 2 = \dim(E)$ alors $u - \delta id = 0$ donc $u = \delta id$; on aurait alors $\operatorname{Tr}(u) = 2\delta$ donc $\delta = 0$ puis $\det(u) = 0$ ce qui est absurde. De la même façon, si on avait $\dim(\ker(u - \delta id)) = 0$, on aurait $\dim(\ker(u + \delta id)) = 2$ et on conclurait de même $u = -\delta id$ qui est absurde aussi. On en déduit $\boxed{\dim(\ker(u - \delta id)) = \dim(\ker(u + \delta id)) = 1}$

3. Soient $e = x_+ + x_-$ et $D = \operatorname{Vect}\{e\}$; comme x_+ et x_- sont non nuls et appartiennent à deux espaces en somme directe, (x_+, x_-) est une famille libre et $e \neq 0$ donc D est une droite. De plus $u(e) = \delta(x_+ - x_-)$ n'est pas colinéaire à e : si on avait $u(e) = \lambda e$, on aurait $\delta(x_+ + x_-) = \lambda(x_+ + x_-)$ donc, par liberté de (x_+, x_-), $\begin{cases} \delta = \lambda \\ \delta = -\lambda \end{cases}$ donc $\delta = 0$ ce qui est absurde. On a donc $e \in D$ et $u(e) \notin D$ donc $\boxed{u(D) \not\subset D}$

On vient en fait de justifier que $(e, u(e))$ est une famille libre de E donc une base de E puisque $\dim(E) = 2$. On pose alors $D = \operatorname{Vect}\{e\}$ et $D' = \operatorname{Vect}\{u(e)\}$. On a prouvé $u(e) \neq 0$ (sinon on aurait $u(e) \in D$) donc D' est aussi une droite et comme $(e, u(e))$ est une base de E, on a $E = D \oplus D'$. Par définition de D', on a bien $u(D) \subset D'$ et comme $u(u(e)) = u^2(e) = \delta^2 e \in D$, on a aussi $u(D') \subset D$. On a donc bien prouvé que $\boxed{u \text{ est échangeur}}$

Partie B :

1. $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ donc $\boxed{M \text{ est somme de deux matrices de carré nul}}$

2. On a $\det(D) = (-1)^p \neq 0$ donc D est inversible et on vérifie $D^2 = I_{n+p}$ donc $D^{-1} = D$. On a alors $DMD^{-1} = -M$ donc $\boxed{M \text{ et } -M \text{ sont semblables}}$

3. On a $u(f_i) \in G = \operatorname{Vect}\{g_1, \dots, g_p\}$ et $u(g_j) \in F = \operatorname{Vect}\{f_1, \dots, f_n\}$ donc la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}}$

4. Si u vérifie (C1) avec F et G non nuls, on vient de voir que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme de la matrice M de la question **1** donc u vérifie (C2) d'après **1** et (C2) d'après **2**.

Si on suppose $G = \{0\}$ alors on a $E = F$ et pour tout $x \in E$, on a $u(x) \in G = \{0\}$ donc $u = 0$. On a alors $u = -u$ donc u vérifie (C2) et $u = 0 + 0$ avec $0^2 = 0$ donc u vérifie (C3). On conclut de même si $F = \{0\}$.

Partie C :

1. Si $f^2 = 0$ alors on a $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$: en effet, si $y \in \operatorname{Im}(f)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et on a alors $f(y) = f^2(x) = 0$ donc $y \in \ker(f)$.

Le théorème du rang donne $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(E)$ et, comme $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$, on a $\dim(\operatorname{Im}(f)) \leqslant \dim(\ker(f))$ donc $\boxed{\dim(E) \leqslant 2\dim(\ker(f))}$

2. Soit $x \in \ker(a) \cap \ker(b)$, on a $a(x) = b(x) = 0$ donc $u(x) = 0$, ce qui donne $x = 0$ par injectivité de u. On a donc $\ker(a) \cap \ker(b) = \{0\}$. Puis $\dim(\ker(a) \oplus \ker(b)) = \dim(\ker(a)) + \dim(\ker(b)) \geqslant \frac{1}{2}\dim(E) + \frac{1}{2}\dim(E)$ donc $\dim(\ker(a) \oplus \ker(b)) = \dim(E)$ donc $\boxed{E = \ker(a) \oplus \ker(b)}$

Vu que les inégalités précédentes sont en fait des égalités, on a en fait $\dim(\ker(a)) = \frac{1}{2}\dim(E)$ donc le théorème du rang donne aussi $\dim(\operatorname{Im}(a)) = \frac{1}{2}\dim(E)$ (et $\dim(E)$ est alors paire). Comme $\operatorname{Im}(a) \subset \ker(a)$, l'égalité des dimensions donne $\boxed{\ker(a) = \operatorname{Im}(a)}$ puis $\ker(b) = \operatorname{Im}(b)$ de la même façon.

3. On pose $F=\ker(a)$ et $G=\ker(b)$. On a bien $E=F\oplus G$; si $x\in F$ alors $u(x)=a(x)+b(x)=b(x)\in \mathrm{Im}(b)=\ker(b)=G$ et si $x\in G$ alors $u(x)=a(x)\in\mathrm{Im}(a)=F$. On conclut donc que $\boxed{u \text{ est échangeur}}$

Partie D :

1. Si $v^k(x)=0$ alors $v^{k+1}(x)=v(v^k(x))=v(0)=0$ donc $\boxed{\ker(v^k)\subset\ker(v^{k+1})}$

2. Soit $N=\max\{\dim(\ker(v^k)),k\in\mathbb{N}\}$; ce maximum existe car $\{\dim(\ker(v^k)),k\in\mathbb{N}\}$ est une partie non vide (contient $0=\dim(\ker(v^0))=\dim(\ker(id))$) de $\mathbb{N}$ majorée par $\dim(E)$. Soit p un entier tel que $\dim(\ker(v^p))=N$; par croissance de la suite $(\dim(\ker(v^k))_{k\in\mathbb{N}}$, on a $p=\dim(\ker(v^k))$ pour tout $k\geqslant p$ ce qui donne, car $\dim(\ker(v^k))\geqslant\dim(\ker(v^p))$ pour $k\geqslant p$, $\boxed{\ker(v^k)=\ker(v^p) \text{ pour } k\geqslant p}$

Par croissance, on a $\displaystyle\bigcup_{0\leqslant k\leqslant h}\ker(v^k)=\ker(v^h)$, donc pour $h\geqslant p$, $\displaystyle\bigcup_{0\leqslant k\leqslant h}\ker(v^k)=\ker(v^p)$ et $\boxed{\displaystyle\bigcup_{0\leqslant k}\ker(v^k)=\ker(v^p)}$

Enfin, comme $\ker(v^p)=\ker(v^{p+1})$, on peut prendre $p+1$ à la place de p donc un de ces deux entiers est pair.

3. $2p\geqslant p$ donc $\ker(v^p)=\ker(v^{2p})$ d'après la question précédente. Si $y\in E^c_\lambda(f)\cap\mathrm{Im}(v^p)$ alors $y=v^p(x)$ et $v^p(y)=0$ donc $0=v^p(y)=v^{2p}(x)$ et $x\in\ker(v^{2p})=\ker(v^p)$, ce qui donne $y=v^p(x)=0$ donc $\ker(v^p)\cap\mathrm{Im}(v^p)=\{0\}$. Avec le théorème du rang, appliqué à v^p, on en déduit $\boxed{E=E^c_\lambda(f)\oplus\mathrm{Im}(v^p)}$

$E^c_\lambda(f)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont stables par f car f et $v^p=(f-\lambda id)^p\in\mathbb{K}[f]$ commutent.

4. Si $x\in\mathrm{Im}(v^p)$ est tel que $(f-\lambda id)(x)=0$ alors $v(v)=0$ et $x=v^p(a)$ donc $0=v(x)=v^{p+1}(a)$ donc $a\in\ker(v^{p+1})=\ker(v^p)$ donc $x=v^p(a)=0$. On en déduit $\boxed{\text{l'injectivité de l'endomorphisme induit par } f-\lambda id \text{ sur } \mathrm{Im}(v^p)}$

5. Si $f(x)=\mu x$ avec $x\in\ker(f-\lambda id)^p$, on a $(f-\lambda id)(x)=(\mu-\lambda)x$ puis, par récurrence, on en déduit $(f-\lambda id)^p(x)=(\mu-\lambda)^p x$. Comme $\mu-\lambda\neq 0$, on en déduit $x=0$, ce qui donne $\boxed{\ker(f_\lambda-\mu id)=\{0\} \text{ si } \lambda\neq\mu}$