PSI2 **DM6** pour le lundi 13 novembre 2023

(d'après E3A MP 2003 maths B)

---

1. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ de dimension finie $n > 0$. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

a) En discutant sur la dimension de $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)$, montrer que $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$ ou $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$.

b) Soit e un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u)$. Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dont le premier vecteur est e. Quelle est la forme de la matrice M de u dans $\mathcal{B}$?

c) Calculer M^2 et en déduire que $u^2 - \mathrm{Tr}(u)u = 0$, où $u^2 = u \circ u$.

d) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Dans ce cas, existe-t-il une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

e) On suppose ici que $\mathrm{Tr}(u) \neq 0$. Montrer que $p = \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(u)}u$ est un projecteur de E et en déduire que l'on a $E = \ker(u) \oplus \ker(u - \mathrm{Tr}(u)id)$, où id désigne l'endomorphisme identité de E.

f) En considérant une base adaptée à la décomposition précédente, montrer que si $\mathrm{Tr}(u) \neq 0$, alors il existe une base de E dans la quelle la matrice de u est diagonale. Donner la forme de cette matrice diagonale.

Il résulte de ces questions que si u est un endomorphisme de rang 1, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale si et seulement si $\mathrm{Tr}(u) \neq 0$.

2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note F_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), F_A(X) = \mathrm{Tr}(AX).$$

a) Montrer que F_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) On note F l'application définie par

$$\begin{array}{cccc} F & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* \\ & & A & \longmapsto & F_A \end{array}$$

Montrer que F est linéaire.

c) Soit $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $F_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de A.
En déduire que F est injective.

d) Montrer que F est un isomorphisme.

3. Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application ψ_f définie par

$$\begin{array}{cccc} \psi_f & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & & X & \longmapsto & f(X)J \end{array}$$

On remarquera que ψ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Justifier qu'il existe une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.

b) Comparer le noyau de f et le noyau de ψ_f. Quelle est l'image de ψ_f ? Quel est le rang de ψ_f ?

c) Exprimer la trace de ψ_f en fonction de A et J. On pourra pour cela introduire une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont J est le premier vecteur et écrire la matrice de ψ_f dans cette base (on précisera alors la taille de cette matrice).

d) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur f et J pour qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans laquelle la matrice de ψ_f est diagonale.

4. On suppose maintenant que $n \geqslant 2$ et on souhaite démontrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contient (au moins) une matrice inversible. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) En utilisant **2.**, montrer qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(BM) = 0$$

b) Pour $r \in [\![1, n]\!]$, on note $J_r = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les r premiers coefficients valent 1 et les $n - r$ suivant sont nuls. Enfin, on note $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{Tr}(J_rP)$.

c) En déduire le résultat annoncé.