TD8 : Algèbre linéaire

Exercice 1
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de M de degré 2 puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (CCP PSI 2017)

1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de degré $\leqslant 2$.
   indication : comme on l'a vu, ça revient à prouver qu'une famille de matrices est libre.
2. Trouver un polynôme annulateur de A et en déduire A^{-1}.
3. Quels sont tous les polynômes annulateurs de A ?
   indication : en supposant que $Q(A) = 0$, écrire la division euclidienne de Q par P (le polynôme de Q2) puis vérifier que P divise Q.

Exercice 3 (CCP PSI 2018)
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Delta_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M + M^T = \mathrm{Tr}(M)A\}$, $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques.

1. Montrer que Δ_A est un espace vectoriel.
2. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 2$, montrer que $\Delta_A = \mathcal{A}_n$.
   indication : en supposant que $M \in \Delta_A$, commencer par déterminer $\mathrm{Tr}(M)$.
3. Déterminer Δ_A si $\mathrm{Tr}(A) = 2$ et $A \notin \mathcal{S}_n$.
   indication : transposer l'équation pour en obtenir une seconde.
4. Si $A \in \mathcal{S}_n$ et $\mathrm{Tr}(A) = 2$, déterminer $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n$ et en déduire Δ_A.
   indication : se rendre compte que $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n$ est inclus dans une droite.

Exercice 4 (CCINP PSI 2018)
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)A$.

1. Trouver un polynôme annulateur de f
   indication : de degré 2 ; polynôme annulateur de f et pas de $f(M)$!
2. Montrer que f est bijectif dès que $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$.
3. On suppose $\mathrm{Tr}(A) = -1$. Donner $\ker(f)$ et montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.
4. Résoudre l'équation $X + (\mathrm{Tr}\, X)A = B$ d'inconnue X.

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2013)
Soit $D_n(x)$ le déterminant de la matrice ayant des $1+x^2$ sur la diagonale, des x juste au dessus et en dessous (si $|i-j| = 1$) et des 0 partout ailleurs.Trouver une relation entre $D_{n+2}(x)$, $D_{n+1}(x)$ et $D_n(x)$ et calculer $D_n(x)$.
indication : ne rien chercher de subtil (pas de manipulations sur les rangées) et développer deux fois successivement ; vous devez trouver une suite récurrente linéaire à deux termes (dont les coefficients dépendent de x, mais il est fixé).

Exercice 6 (CCP PSI 2016)
On pose $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $m_{i,j} = \begin{cases} b & \text{si } j > i \\ a & \text{si } i > j \\ r_i & \text{si } i = j \end{cases}$ où $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{K}^n$ et on note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $x \mapsto \det(M + xJ)$ est une fonction affine (polynômiale de degré $\leqslant 1$).
   indication : par manipulation sur les rangées, éliminer tous les termes x sauf 1.
2. En déduire, lorsque $a \neq b$, la valeur de $\det(M + xJ)$ puis de $\det(M)$.
   indication : on a $\forall x \in \mathbb{R}, \det(M + xJ) = \alpha x + \beta$ donc deux inconnues α et β que l'on peut déterminer si on trouve deux valeurs de x pour lesquelles $\det(M + xJ)$ est facile à calculer.