Correction du DM6

(E3A MP 2003 maths B)

---

1. a) $\text{rg}(u) = 1$ donc $\dim(\ker(u) \cap \text{Im}(u)) \leqslant 1$. Si $\dim(\ker(u) \cap \text{Im}(u)) = 0$ alors $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ et la formule du rang donne alors $\boxed{E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)}$

Si $\dim(\ker(u) \cap \text{Im}(u)) = 1 = \dim(\text{Im}(u))$ alors $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \text{Im}(u)$ puis $\boxed{\text{Im}(u) \subset \ker(u)}$

b) e est un vecteur non nul donc constitue une famille libre, que l'on peut compléter en une base de E.

Comme M est de rang 1, on a $\boxed{M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}$ avec $a_1, \dots, a_n$ des scalaires non tous nuls.

c) $M^2 = a_1 M$ donc comme $a_1 = \text{Tr}(M)$, on a $\boxed{u^2 - \text{Tr}(u)u = 0}$

d) $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ si et seulement si $u^2 = 0$ donc si et seulement si $\text{Tr}(u)u = 0$, ce qui équivaut à $\boxed{\text{Tr}(u) = 0}$ car $\text{rg}(u) = 1$ donc $u \neq 0$.
Si une telle base existait, on aurait $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda, 0 \dots, 0)$ en réordonnant les vecteurs de la base puisque $\text{rg}(u) = 1$ donc seul un des coefficients diagonaux serait non nul. On aurait alors $\text{Tr}(u) = \lambda$ donc $\lambda = 0$ et $u = 0$ ce qui est exclu. Ainsi $\boxed{\text{il n'existe aucune base de } E \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ est diagonale}}$

e) $p^2 = \dfrac{1}{\text{Tr}(u)^2} u^2 = \dfrac{1}{\text{Tr}(u)} u = p$ donc $\boxed{p \text{ est un projecteur de } E}$ On en déduit que $E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$ et $\text{Im}(p) = \ker(p - id)$. Enfin, comme $p = \dfrac{1}{\text{Tr}(u)} u$, on a $\ker(p) = \ker(u)$ et $\ker(p - id) = \ker(u - \text{Tr}(u)id)$ donc on a bien $\boxed{E = \ker(u) \oplus \ker(u - \text{Tr}(u)id)}$

f) Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition précédente, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \boxed{\text{diag}(0, \dots, 0, \text{Tr}(u))}$ donc diagonale.

2. a) Pour $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $F_A(\alpha X + \beta Y) = \text{Tr}(A(\alpha X + \beta Y)) = \alpha \text{Tr}(AX) + \beta \text{Tr}(AY)$ par linéarité de la trace. Ainsi, F_A est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ donc $\boxed{F_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*}$

b) Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
$F(\alpha A + \beta B)(X) = \text{Tr}((\alpha A + \beta B)X) = \alpha \text{Tr}(AX) + \beta \text{Tr}(AY) = (\alpha F_A + \beta F_B)(X)$ donc $F_{\alpha A + \beta B} = \alpha F_A + \beta F_B$ ce qui signifie que $\boxed{F \text{ est linéaire}}$

c) $AE_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j}$ donc $\text{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$. Ainsi, si $A \in \ker(F)$, on a, pour tout (i, j), $\text{Tr}(AE_{i,j}) = 0$ donc $a_{i,j} = 0$ puis $A = 0$; donc $\boxed{F \text{ est injective}}$

d) $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* = n^2$ et F est linéaire et injective donc $\boxed{F \text{ est un isomorphisme}}$

3. a) F est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ donc, comme $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, f possède un unique antécédent par F donc $\boxed{\text{il existe une unique matrice } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } f = F_A}$

b) Comme $J \neq 0$, on a $\psi_f(X) = 0 \Leftrightarrow f(X) = 0$ ce qui signifie que $\boxed{\ker(f) = \ker(\psi_f)}$
Par définition de $\psi_f(X)$, on a $\psi_f(X) \in \text{Vect}\{J\}$ donc $\text{Im}(\psi_f) \subset \text{Vect}\{J\}$. Comme $\psi_f \neq 0$, car $f \neq 0$ et $J \neq 0$, $\text{rg}(\psi_f) \geqslant 1$. On en déduit $\boxed{\text{Im}(\psi_f) = \text{Vect}\{J\} \text{ et } \text{rg}(\psi_f) = 1}$

c) $J \neq 0$ est un vecteur libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc on peut compléter cette famille libre en une base $\mathcal{B}_M = (J, J_2, \dots, J_{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_M}(\psi_f) = \begin{pmatrix} f(J) & f(J_2) & \dots & f(J_{n^2}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$.

On en déduit $\boxed{\text{Tr}(\psi_f) = f(J) = \text{Tr}(AJ)}$

d) Comme ψ_f est un endomorphisme de rang 1, d'après **1.**, il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de ψ_f est diagonale si et seulement si $\text{Tr}(\psi_f) \neq 0$ donc si et seulement si $\boxed{\text{Tr}(AJ) = f(J) \neq 0}$

4. a) Il existe une forme linéaire non nulle φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{H} = \ker(\varphi)$ et d'après **2.**, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = F_B$. On a donc $\boxed{M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow F_B(M) = 0}$ De plus, on a $B \neq 0$ car $F_0 = 0$ et $\varphi \neq 0$.

b) On vérifie que $\boxed{\text{Tr}(J_r P) = 0}$

c) Il existe deux matrices inversibles Q_1 et Q_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = Q_1 J_r Q_2^{-1}$, où $r = \mathrm{rg}(B)$. On a alors $0 = \mathrm{Tr}(J_r P) = \mathrm{Tr}(Q_1^{-1} B Q_2 P) = \mathrm{Tr}(B Q_2 P Q_1^{-1})$, donc $Q_2 P Q_1^{-1} \in \mathcal{H}$. De plus, l'endomorphisme canoniquement associé à P envoie la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ sur $(e_2, \ldots, e_n, e_1)$ qui est aussi une base de $\mathbb{C}^n$ donc $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ (on peut aussi vérifier que $P^n = I_n$ donc P est inversible et $P^{-1} = P^{n-1}$, ou encore vérifier que $\mathrm{rg}(P) = n$ ou $\det(P) = (-1)^{n+1} \neq 0$ ou toute autre idée...) puis par produit, on a $Q_2 P Q_1^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\boxed{\mathcal{H} \text{ contient une matrice inversible}}$