DM7

(Extrait de E4A PSI 2002 maths 2)

Soit α un nombre réel strictement positif.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application u_n de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$$

1. Étude des modes de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$

a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

b) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

c) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Prouver que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

d) On suppose dans cette question que $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$. Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

i. Établir l'inégalité : $R_n(x) \geqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}\,(1 + kx^2)}$

ii. En déduire que la série $\sum u_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, a]$, où a est un réel strictement positif.

On note S l'application de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

2. Étude de la continuité de S

a) Montrer que, pour tout α, S est continue sur $]0, +\infty[$

b) Déterminer la limite et un équivalent de S en $+\infty$.

c) Montrer que, si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, alors S est continue sur $[0, +\infty[$.

d) On suppose $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$. Soient x un réel strictement positif et f l'application définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{x}{t^\alpha (1 + tx^2)}$$

i. Prouver que f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

ii. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x)$.

iii. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}\,(1 + tx^2)}\,\mathrm{d}t$ (on pourra poser $u = \sqrt{t}$)

iv. En déduire que S n'est pas continue en 0.

e) Pour $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, déterminer un équivalent de S en 0. (on pourra réutiliser la comparaison série-intégrale précédente)