Correction du DM7

(Extrait de E4A PSI 2002 maths 2)

---

1. a) On a $u_n(0)=0$ et si $x>0$, $u_n(x)\sim\dfrac{1}{xn^{1+\alpha}}$ (positif) donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^+}$

b) u_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $u_n'(x)=\dfrac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$ donc $\|u_n\|_\infty=u_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ donc $\sum\|u_n\|_\infty$ converge si et seulement si $\alpha+\dfrac{1}{2}>1$. $\boxed{\sum u_n \text{ converge normalement si et seulement si } \alpha>\dfrac{1}{2}}$

c) Si n est suffisamment grand alors $\dfrac{1}{\sqrt{n}}<a$ donc $\|u_n\|_{\infty,[a,b]}=u_n(a)$ et comme $a>0$, la série $\sum u_n(a)$ converge on a $\boxed{\sum u_n \text{ normalement convergente sur } [a,b]}$

d) i. $u_n\geqslant 0$ donc $R_n(x)\geqslant\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}u_k(x)$ puis $\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$ donne $u_k(x)\geqslant\dfrac{x}{\sqrt{k}(1+kx^2)}\geqslant\dfrac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$ si $k\leqslant 2n$.

ii. On a donc $R_n(x)\geqslant\dfrac{x}{\sqrt{2n}}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{1+kx^2}\geqslant\frac{x}{\sqrt{2n}}\times\frac{n}{1+2nx^2}$ puis $\|R_n\|_{\infty,[0,a]}\geqslant R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\geqslant\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$ car $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\in[0,a]$ pour n suffisamment grand. Ainsi, $\|R_n\|_{\infty,[0,a]}$ ne tend pas vers 0 ce qui signifie que : $\boxed{\sum u_n \text{ ne converge pas uniformément sur } [0,a]}$

2. a) On applique le théorème :
H1 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H2 : $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$
On en déduit que $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}}$

b) Pour la limite
H1 : Pour $n\geqslant 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n(x)=0$.
H2 : Comme la fonction u_n est décroissante sur $[1,+\infty[$ (pour tout $n\geqslant 1$), on a $\|u_n\|_{\infty,[1,+\infty[}=u_n(1)$ et $\sum u_n(1)$ converge donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$.
On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}u_n(x)=0}$

On a $xS(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(x)$ avec $v_n(x)=\dfrac{x^2}{n^\alpha(1+2nx^2)}$ et on réapplique le théorème de double limite :
H1 : Pour $n\geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n(x)=\dfrac{1}{2n^{\alpha+1}}$.
H2 : Si $x>0$, alors $|v_n(x)|=\dfrac{1}{n^\alpha\left(2n+\frac{1}{x^2}\right)}\leqslant\dfrac{1}{2n^{1+\alpha}}$ donc $\|v_n\|_{\infty,\mathbb{R}^{+*}}\leqslant\dfrac{1}{2n^{1+\alpha}}$ et comme $1+\alpha>1$, la série $\sum v_n$ converge normalement sur $]0,+\infty[$.

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}xS(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}v_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\geqslant 1$ (donc $\neq 0$). On a donc $\boxed{S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}}$

c) On recommence :
H1 : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.
H2 : Si $\alpha>\dfrac{1}{2}$, $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.
donc $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

d) i. f est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$ et $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{xt^{1+\alpha}}$ et $1+\alpha>1$ donc $\boxed{f \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[}$

ii. f est décroissante sur $[1,+\infty[$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(n)=u_n(x)$ donc on a en ajoutant (toutes les convergences sont déjà justifiées) : $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(x)=S(x)$.

iii. On pose $t = u^2$: la fonction $u \mapsto u^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ et on a $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{2x}{1+(ux)^2}\,\mathrm{d}u$ donc si $x > 0$, on a $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t = \pi - 2\arctan x}$

iv. On a pour tout $x > 0$, $S(x) \geqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et si $t \geqslant 1$, on a $f(t) \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}$ donc on obtient la minoration $S(x) \geqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t = \pi - 2\arctan x$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} \pi - 2\arctan(x) = \pi > 0$, la fonction S ne peut pas tendre vers $0 = S(0)$ en 0 donc $\boxed{S \text{ n'est pas continue en } 0}$

e) De la même façon que précédemment, on obtient, pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$, $u_n(x) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ puis en sommant,

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) = u_1(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \frac{x}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose alors $u = tx^2 \Leftrightarrow t = \dfrac{u}{x^2}$: la fonction $u \mapsto \dfrac{u}{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante $[x^2, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^{1-2\alpha}} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha(1+u)}$ puis

$$\frac{1}{x^{1-2\alpha}} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha(1+u)} \leqslant S(x) \leqslant \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{x^{1-2\alpha}} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha(1+u)}$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^\alpha(1+u)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car continue par morceaux sur cet intervalle, équivalente à $\dfrac{1}{u^{1+\alpha}}$ en $+\infty$ et à $\dfrac{1}{u^\alpha}$ en 0 (avec $\alpha < 1$). On a donc $\displaystyle\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha(1+u)} \xrightarrow[x\to 0]{} I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha(1+u)}$. De plus $I_\alpha > 0$ car $u \mapsto \dfrac{1}{u^\alpha(1+u)}$ est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit $\displaystyle\frac{1}{x^{1-2\alpha}} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha(1+u)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{I_\alpha}{x^{1-2\alpha}}$.

Enfin, comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+2x^2} = 0$, on a, pour $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{x}{1+2x^2} \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{1-2\alpha}}\right)$.

L'encadrement de $S(x)$, valable si $x > 0$, donne donc $\boxed{S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{I_\alpha}{x^{1-2\alpha}}}$

On en déduit en particulier que si $\alpha = \dfrac{1}{2}$ alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} S(x) = I_{1/2} = \pi$ d'après les calculs précédents.