PSI2 **DM8** pour le lundi 27 novembre 2023

(d'après CCP PC 2010 maths 2)

Partie I

On note $D = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des nombres entiers strictement négatifs.
On considère la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -n, u_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$$

1. Montrer que la série de fonctions converge simplement sur D.

On notera désormais $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série de fonctions, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n.

2. a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n^{(p)}$ la dérivée de u_n à l'ordre p.
Calculer $u_n^{(p)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -n$.

b) Soient a et b deux réels tels que $-1 < a < b$.
Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

c) Déduire de ce qui précède que U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

3. a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $x \in D$, exprimer $U(x)$ à l'aide de $U_N(x)$ et $U(x+N)$.

b) En déduire que U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-N-1, -N[$, puis sur D.

c) Soit $p \in \mathbb{N}$ donné, $p \geqslant 2$.
Pour $x \in D$, établir une expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$ à l'aide de p et de $U^{(p-2)}(x)$.

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Donner un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $-N$.

5. a) Montrer que U est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$.

b) Montrer que pour $x > 0$, on a $\int_{x+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant U(x) \leqslant \int_{x}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
En déduire un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6. Montrer que pour tout $x \in D$, on a $U(x) = \frac{1}{4}\left[U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]$.

Partie II

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall t > 0, f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

1. Montrer que, pour tout $x > -1$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt} = \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On définit la fonction φ sur $]-1, +\infty[$ par :

$$\forall x > -1, \varphi(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

2. a) Montrer que $\varphi(x) - \varphi(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$ pout tout $x > -1$.

b) Montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire que $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

c) Déduire de ce qui précède que $\varphi(x) = U(x)$ pour tout $x > -1$.

3. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x > -1$, on a

$$\varphi^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{p+1} e^{-xt}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

On pourra utiliser le théorème d'intégration terme à terme et l'expression de $U^{(p)}(x)$.