Correction du DM8

(Extrait de CCP PC 2010 maths 2)

Partie I

1. Pour $x \in \mathcal{D}$ fixé, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ positif donc $\sum u_n(x)$ converge. Ainsi $\boxed{\sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathcal{D}}$

2. a) u_n est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$ et pour $x \in \mathcal{D}$, on a $\boxed{u_n^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{p+2}}}$ (récurrence sur p)

b) Si $x \in [a,b]$, on a $\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \dfrac{(p+1)!}{(n+a)^{p+2}}$(indépendant de x) donc $\left\|u_n^{(p)}\right\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{(p+1)!}{(n+a)^{p+2}}$ donc comme $\sum \dfrac{1}{(n+a)^{p+2}}$ converge, $\boxed{\sum u_n^{(p)} \text{ converge normalement sur } [a,b]}$

c) On a, pour $k \in \mathbb{N}^*$,
H1 : les fonctions u_n sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.
H2 : pour $j \in [\![0,k]\!]$, la série de fonctions $\sum u_n^{(j)}$ converge simplement sur $]-1,+\infty[$ (car elle converge normalement sur tout segment de $]-1,+\infty[$).
H3 : la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment de $]-1,+\infty[$.

donc U est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]-1,+\infty[$ et $U^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(k)}(x)$.

En conclusion, ceci étant valable pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$\boxed{U \in \mathcal{C}^\infty(]-1,+\infty[,\mathbb{R}) \text{ et si } x > -1 \text{ et } p \in \mathbb{N},\ U^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{p+2}}}$$

3. a) On a $U(x+N) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x+N)^2} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = U(x) - U_N(x)$ donc $\boxed{U(x) = U(x+N) + U_N(x)}$

b) $U \in \mathcal{C}^\infty(]-1,0[,\mathbb{R})$ donc $x \mapsto U(x+N) \in \mathcal{C}^\infty(]-N-1,-N[,\mathbb{R})$ (car $x \in]-N-1,-N[\Rightarrow (x+N) \in]-1,0[$). De plus N étant fixé, U_N est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-N-1,-N[$ comme somme finie de fontions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. Par somme, on a $U \in \mathcal{C}^\infty(]-N-1,-N[,\mathbb{R})$ et donc, ceci étant valable pour tout N, on a $\boxed{U \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D},\mathbb{R})}$

c) On commence par montrer que $U^{(p-2)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(p-1)!}{(n+x)^p}$ pour tout x de $\mathcal{D}$: si $x \in]-1,+\infty[$, c'est déjà fait ; si $x \in]-N-1,-N[$, on a $U(x) = U(x+N) + U_N(x)$ et $x+N \in]-1,0[$ donc on a

$U^{(p-2)}(x) = U^{(p-2)}(x+N) + U_N^{(p-2)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(p-1)!}{(n+x+N)^p} + \sum_{n=1}^{N} u_n^{(p-2)}(x)$ (car la deuxième somme est finie)

donc on a bien, après changement d'indice et regroupemet des 2 sommes, le résultat annoncé.

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p} = \frac{(-1)^p}{(p-1)!} U^{(p-2)}(x)}$

4. On a, pour $x \in]-N-1,-N[\cup]-N,-N+1[$, $U(x) = U_{N-1}(x) + u_N(x) + U(x+N)$. U_{N-1} est continue en $-N$ et $x \mapsto U(x+N)$ est continue en $-N$ car U est continue en 0, donc ces deux fonctions sont bornées au voisinage de $-N$; enfin, comme $\displaystyle\lim_{x\to-N} u_N(x) = +\infty$, on $U(x) \underset{x\to-N}{\sim} u_N(x)$ donc $\boxed{U(x) \underset{x\to-N}{\sim} \dfrac{1}{(N+x)^2}}$

5. a) U est une somme de fonctions strictement décroissantes sur $]-1,+\infty[$ donc
$\boxed{U \text{ est strictement décroissante sur }]-1,+\infty[}$
On peut aussi utiliser l'expression de U' obtenue à la question **2.**

b) On a pour $n \geqslant 0$, $\dfrac{1}{(n+1+x)^2} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1}{(n+x)^2}$ donc pour $n \geqslant 1$, on a :
$\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2} \leqslant u_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t+x)^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $x > 0$ donc, en sommant pour $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2} \leqslant U(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2}$. On pose alors $u = t+x$ (la fontion $t \mapsto t+x$ est $\mathcal{C}^1$,bijective, strictement croissante sur $\mathbb{R}$) et on obtient $\boxed{\displaystyle\int_{x+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \leqslant U(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}}$

On en déduit que $\dfrac{1}{x+1} \leqslant U(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xU(x) = 1$, on a $\boxed{U(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}}$

6. $U_N\left(\dfrac{x}{2}\right)+U_N\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{4}{(2n+x)^2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{4}{(2n+x-1)^2} = 4U_{2N}(x)$ donc quand N tend vers $+\infty$, on a $\boxed{U\left(\dfrac{x}{2}\right)+U\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=4U(x)}$

Partie II

1. Pour $x>0$, $t\mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$; $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t)e^{-xt}=1$ et $f(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (car $x>0$) donc $\boxed{t\mapsto f(t)e^{-xt} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ si } x>0}$

2. a) On a $\varphi(x)-\varphi(x+1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\left(e^{-((x+1)-1)t}-e^{-(x+1)t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} te^{-(x+1)t}\,\mathrm{d}t$. On effectue alors une IPP : les fonctions $t\mapsto t$ et $t\mapsto \dfrac{e^{-(x+1)t}}{-(x+1)}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\frac{e^{-(x+1)t}}{-(x+1)}=0$.

On a donc $\varphi(x)-\varphi(x+1)=\left[t\dfrac{e^{-(x+1)t}}{-(x+1)}\right]_0^{+\infty}+\displaystyle\int_0^{+\infty}1\times\frac{e^{-(x+1)t}}{x+1}\,\mathrm{d}t$ et $\boxed{\varphi(x)-\varphi(x+1)=\dfrac{1}{(x+1)^2} \text{ si } x>-1}$

b) On vérifie (par une étude de fonction) que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $e^t\geqslant 1+t$ donc $0\leqslant f(t)\leqslant 1$ si $t>0$. On a alors $0\leqslant f(t)e^{-xt}\leqslant e^{-xt}$ et comme $t\mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x>0$, on a $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$.

On en déduit donc $\boxed{\lim_{+\infty}\varphi=0}$

c) On fixe $x>-1$, on a, pour $n\geqslant 0$, $\varphi(x+n)-\varphi(x+n+1)=\dfrac{1}{(x+n+1)^2}$; la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+x+1)^2}$ est convergente donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}[\varphi(x+n)-\varphi(x+n+1)]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+x+1)^2}=U(x)$. La série de gauche étant télescopique, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varphi(x+n+1)=0$, on a bien $\boxed{\varphi(x)=U(x) \text{ si } x>-1}$

d) Les fonctions U et φ sont égales sur $]-1,+\infty[$ et U est $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle donc $\boxed{\varphi \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-1,+\infty[}$

Reste à obtenir la valeur de $\varphi^{(p)}$: on utilise le TITT.

Pour $t>0$, on a $0<e^{-t}<1$ donc $\dfrac{t^{p+1}}{e^t-1}e^{-xt}=\dfrac{t^{p+1}}{1-e^{-t}}e^{-(x+1)t}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}t^{p+1}e^{-(x+1+n)t}$. On pose alors, pour $x>-1$ et $p\geqslant 2$ fixés, $h_n(t)=t^{p+1}e^{-(x+n+1)t}$ et on vérifie les hypothèses du TITT :

H1 : la séries de fonctions $\sum h_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $t\mapsto\dfrac{t^{p+1}}{e^t-1}e^{-xt}$.

H2 : les fonction h_n et la fonction $t\mapsto\dfrac{t^{p+1}}{e^t-1}e^{-xt}$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

H3 : on a $\displaystyle\lim_{t\to 0}h_n(t)=0$ car $p+1\geqslant 1$ et $h_n(t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car $x+n+1>0$ donc h_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

H4 : on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}|h_n(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t^{p+1}e^{-(x+n+1)t}\,\mathrm{d}t$. On effectue alors $(p+1)$ IPP dont les justifications sont les mêmes que celles de la question **II.2.a** et on trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty}|h_n(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{(p+1)!}{(n+x+1)^{p+2}}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|h_n(t)|\,\mathrm{d}t$ est donc convergente.

On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{p+1}}{e^t-1}e^{-xt}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}h_n(t)\,\mathrm{d}t=(p+1)!\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^{p+2}}=(-1)^pU^{(p)}(x)$; les calculs d'intégrales ont déjà été faits puisque $h_n\geqslant 0$.

On en déduit $\boxed{\varphi^{(p)}(x)=U^{(p)}(x)=(-1)^p\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{p+1}}{e^t-1}e^{-xt}\,\mathrm{d}t \text{ si } x>-1}$