Correction du DM9

(Extrait de CCINP MP 2019 maths 2)

Partie I :

1. Cours

2. $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 5$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 3$ (matrices triangulaires inversibles car leurs coefficients diagonaux sont non nuls), $\det(A) = \det(B) = 4$ (matrices triangulaires) et $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X-1)(X-2)^2$ (matrices triangulaires).

On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1$ et $\dim(E_2(A)) = 2 = m_2(A)$; comme la deuxième valeur propre de A est simple, A est diagonalisable.

Par contre $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(B - 2I_3) \geqslant 2$ ((C_1, C_2) libre) puis $\dim(E_2(B)) \leqslant 1 < m_2(B)$ et B n'est pas diagonalisable. On en déduit $\boxed{A \text{ et } B \text{ ne sont pas semblables}}$

3. On étudie les variations de $P = X^3 - 3X - 1$: $P' = 3(X^2 - 1)$; $P(-1) = 1 >$ et $P(1) = -3 < 0$ donc P s'annule une fois sur chaque intervalle $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$ donc admet trois racines réelles α, β et γ (il est donc SARS)

On vérifie que $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = X^3 - 3X - 1$ SARS donc A et B sont diagonalisables, semblables à $D = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$. Il existe donc $P_1, P_2 \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = P_1 D P_1^{-1}$ et $B = P_2 D P_2^{-1}$, ce qui donne $A = (P_1 P_2^{-1}) B (P_1 P_2^{-1})^{-1}$ donc $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables}}$

4. On a $\dim(\ker(u)) = n - 1$; on introduit un supplémentaire D (droite) de $\ker(u)$ et B une base adaptée à la décomposition $E = \ker(u) \oplus D$. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme demandée.

5. On a $U^2 = a_n U$ donc si $u^2 \neq 0$, on a $a_n \neq 0$. Le polynôme caractéristique de u est donc $\mathcal{X}_u = X^{n-1}(X - a_n)$ avec $a_n \neq 0$. On a aussi $\dim(E_0(u)) = \dim(\ker(u)) = n - 1 = m_0(u)$ et comme la deuxième valeur propre a_n est simple, $\boxed{u \text{ est diagonalisable}}$

6. On a $C_1 = C_3$ et $C_2 = C_4$ donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$; de plus (C_1, C_2) est libre car $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ donc $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = 2$ puis $\mathrm{rg}(C_1, C_2) \geqslant \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. On en déduit $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2}$

$A \notin \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ donc $\boxed{0 \in \mathrm{Sp}(A)}$ puis $\dim(E_0(A)) = \dim(\ker(A)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 2$ et $m_0(A) \geqslant \dim(E_0(A)) = 2$.

On vérifie $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(\alpha + \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ donc $2(\alpha + \beta) \in \mathrm{Sp}(A)$ et $m_{2(\alpha+\beta)}(A) \geqslant 1$. De même $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2(\alpha - \beta) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ donc $2(\alpha - \beta) \in \mathrm{Sp}(A)$ et $m_{2(\alpha-\beta)} \geqslant 1$. A possède donc au moins 3 valeurs propres distinctes 0, $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$; comme $m_0(A) + m_{2(\alpha+\beta)}(A) + m_{2(\alpha-\beta)}(A) \geqslant 4$, on a toutes les valeurs propres de A, $\mathcal{X}_A = X^2(X - 2(\alpha + \beta))(X - 2(\alpha - \beta))$ puis $m_0(A) = 2 = \dim(E_0(A))$ et $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$

Une base de vecteurs propres de A est alors $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

7. Si u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A et $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ alors on a $u(e_1) = \lambda e_1$ et $u(e_2) = a e_1 + \lambda e_2$. On pose alors $f_1 = \dfrac{a}{b} e_1$ et $f_2 = e_2$ et on vérifie que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f_1, f_2)) = \begin{vmatrix} a/b & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{a}{b} \neq 0$; on a ensuite $u(f_1) = \dfrac{a}{b} u(e_1) = \lambda f_1$ et $u(f_2) = a e_1 + \lambda e_2 = b f_1 + \lambda f_2$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = B$ donc $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables}}$

On peut aussi le faire matriciellement : si on pose $P = \begin{pmatrix} a/b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *on vérifie* $P^{-1} = \begin{pmatrix} b/a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $A = PBP^{-1}$.

Partie II

8. On a $PB = AP$ donc $(R + iS)B = A(R + iS)$ et, en identifiant les parties réelles et imaginaires, on a, car A et B sont réelles, $\boxed{RB = AR \text{ et } SB = AS}$

9. On vérifie par récurrence sur n que si $R, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\Pi : x \mapsto \det(R+xS) \in \mathbb{R}[X]$: pour $n=1$, on a $\Pi(x) = r+sx \in \mathbb{R}_1[X]$ puis si on suppose le résultat pour toutes matrices R, S de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et si on choisit $R, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par développement par rapport à la dernière colonne, on a $\det(R+xS) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}(r_{i,n}+xs_{i,n})\det(R_{i,n}+xS_{i,n})$, où $R_{i,n}$ et $S_{i,n}$ sont les matrices extraites de R et S en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $n^{\text{ème}}$ colonne ; par hypothèse de récurrence appliquée aux matrices $R_{i,n}$ et $S_{i,n}$, $x \mapsto \det(R_{i,n}+xS_{i,n})$ est polynômiale, puis par produit et combinaison linéaire de polynômes, Π est polynômiale. (*On pourrait même prouver que* $\deg(\Pi) \leqslant n$ *de la même façon.*)

On a $\Pi(i) = \det(P) \neq 0$ donc Π n'est pas le polynôme nul. On en déduit que Π admet un nombre fini de racines réelles et donc, comme $\mathbb{R}$ est infini, il existe une infinité de réels x tels que $\Pi(x) \neq 0$. On a donc, en particulier, $\boxed{\text{il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } Q = R+xS \text{ soit inversible}}$

10. Par combinaison linéaire des lignes $RB = AR$ et $SB = AS$, on a $QB = AQ$ et comme Q est inversible, on a $B = Q^{-1}AQ$ et $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

11. $\mathcal{X}_A = X(X-i)(X+i)$ est SARS dans $\mathbb{C}$ donc A est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à $D = \mathrm{diag}(0, i, -i)$; on vérifie que $\mathcal{X}_B = X^3 + X$ donc B est elle aussi diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et semblable à D. Les matrices réelles A et B sont donc semblables entre elles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$; d'après la question précédente $\boxed{A \text{ est } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}}$