L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet se compose de deux problèmes indépendants. Veuillez commencer chaque problème sur une nouvelle page.

PROBLEME I

(inspiré de CCP PC 2003 maths 2)

On notera D l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers relatifs autres que 0 : $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$.
Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur D par

$$\forall x \in D, u_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

Lorsque la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(x)$ converge, on note $U(x)$ sa somme :

$$U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

Partie I : Étude de U et lien avec une intégrale

1. Montrer que U est définie sur D.

2. a) Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$. Que peut-on en déduire pour la fonction U (justifier) ?

b) Montrer que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.

3. Soit φ la fonction définie, lorsque l'intégrale converge, par

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(xt)}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t$$

a) Déterminer le domaine de définition de φ.

b) Pour $x \in]-1, 1[$, à l'aide du théorème d'intégration terme à terme, trouver une relation entre $\varphi(x)$ et $U(x)$.

4. On note v_n la primitive de la fonction u_n qui s'annule en 0, définie sur $[0, 1[$:

$$\forall n \geqslant 1, \forall x \in [0, 1[, v_n(x) = \int_0^x u_n(t) \, \mathrm{d}t$$

De plus, lorsque la série converge, on note $V(x)$ la somme de la série de terme général $v_n(x)$:

$$V(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$

a) Expliciter $v_n(x)$, pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0, 1[$.

b) Montrer que V est définie sur $[0, 1[$ et que

$$\forall x \in [0, 1[, V(x) = \int_0^x U(t) \, \mathrm{d}t$$

5. On définit cette fois, pour $x \in \mathbb{R}$, la suite $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, s_n(x) = x \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

a) Déterminer, pour $x \in [0, 1[$ et $n \geqslant 1$ une relation entre $s_n(x)$ et $V_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k(x)$.

b) En déduire que la suite (s_n) converge simplement sur $[0, 1[$ vers une fonction s et exprimer $s(x)$ en fonction de x et $V(x)$.

Partie II : Développement eulérien du $\sin$ **et valeur de** U

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit les deux suites $(I_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$I_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2xt)\cos^{2n} t \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad w_n = I_n(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t$$

a) À l'aide de deux intégrations par parties, montrer la relation suivante, valable pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}(x)$$

b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ puis un équivalent de w_n quand n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$s_n(x) \times I_n(x) = \frac{1}{\pi} w_n \times \sin(\pi x)$$

2. a) Justifier les deux inégalités suivantes :

i. $\forall u \in \mathbb{R}, 1 - \cos u \leqslant \dfrac{u^2}{2}$

ii. $\forall u \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \sin u \geqslant \dfrac{2}{\pi} u$

b) En déduire, pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $x \in \mathbb{R}$, $1 - \cos(2xt) \leqslant \dfrac{x^2\pi^2}{2} \sin(t)$

c) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,(I_n(x) - w_n) = 0$$

3. Déduire des questions précédentes le développement eulérien de la fonction sin :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\sin(\pi x)}{\pi} = \lim_{n\to+\infty} x \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

4. Déterminer, pour $x \in]0,1[$, une expression explicite de $V(x)$ puis de $U(x)$.

5. En utilisant **I.2.b**, en déduire la valeur de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Fin du problème 1

PROBLÈME II

(Extrait de CCP PC 2010 maths 1)

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension fine n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.
$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.
On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité de E.
Pour tout endomorphisme f, $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de f.
L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\operatorname{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) | h^2 = f\}.$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = id$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors $\prod_{1 \leqslant i \leqslant q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \cdots \circ f_q$.
On note $\mathbb{R}[f]$ l'ensemble des polynômes en f : $\mathbb{R}[f] = \{g \in \mathcal{L}(E) | \exists P \in \mathbb{R}[X], g = P(f)\}$
Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de « racines carrées » d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

Partie I

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable.

2. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base. *On choisira des vecteurs propres dont la première coordonnée vaut* 1.

3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1} (aucune justification n'est attendue).

4. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question **2**.

5. Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.

6. Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique, en fonction de P et P^{-1}.

7. Justifier que $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}[f]$.

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

2. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = id + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

3. Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

4. Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, on ait $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.

5. Après avoir calculé p^2, q^2, $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.

6. Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Ecrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.

7. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

8. En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

9. Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

10. A-t-on $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}[f]$?

Partie II

Soient $p_1, \dots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, m nombres réels distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i.$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i.$$

2. En déduire que $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} (f - \lambda_i id) = 0$, puis que f est diagonalisable.

3. Pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on considère le polynôme :

$$L_\ell(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ i \neq \ell}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_\ell - \lambda_i)}.$$

Montrer que pour tout entier ℓ, tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$.
En déduire que $\mathrm{Im}(p_\ell) \subset \ker(f - \lambda_\ell id)$, puis que le spectre de f est :

$$\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}.$$

4. Vérifier que pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant i, j \leqslant m$, on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

5. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{p_1, \dots, p_m\}$. Déterminer la dimension de F.

6. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$ dans le cas où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls.

7. Dans cette question, on suppose de plus que $m = n$.

a) Préciser alors la dimension des sous-espaces propres de f.

b) Montrer que si $h \in \mathcal{R}(f)$, tout vecteur propre de f est également vecteur propre de h.

c) En déduire que $\mathcal{R}(f) \subset F$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide.

8. Montrer que si $m < n$ et si tous les λ_i sont positifs ou nuls, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

9. Montrer que si $m = n$, alors $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}[f]$.

Fin du problème 2