Correction du DS4

Problème 1 : (inspiré de CCP PC 2003 maths 2)

Partie I

1. Si $x \in D$ et $n \geqslant 1$ alors $u_n(x)$ existe ; de plus, pour $x \neq 0$, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-2x}{n^2}$ (de signe fixe) donc $\sum u_n(x)$ converge. Comme $u_n(0) = 0$, $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in D$ donc $\boxed{U \text{ est définie sur } D}$

2. a) Si $|x| \leqslant a$, alors $|u_n(x)| = \dfrac{2x}{n^2 - x^2} \leqslant \dfrac{2a}{n^2 - a^2}$ (indépendant de x) donc $\|u_n\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \dfrac{2a}{n^2-a^2} = -u_n(a)$; on a déjà vu que $\sum u_n(a)$ converge donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge normalement sur } [-a,a]}$

On en déduit la continuité de U sur $]-1,1[$:

H1 : Les fonctions u_n sont continues sur $]-1,1[$.

H2 : $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$.

Donc $\boxed{U \text{ est continue sur }]-1,1[}$

b) H1 : pour tout $n \geqslant 1$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

H2 : $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.

H3 : Soit $[-a,a] \subset]-1,1[$ et $x \in [-a,a]$, on a $|u_n'(x)| = \dfrac{2(n^2+x^2)}{(n^2-x^2)^2} \leqslant \dfrac{2(n^2+a^2)}{(n^2-a^2)^2}$ (indépendant de x) donc $\|u_n'\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \dfrac{2(n^2+a^2)}{(n^2-a^2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$ donc $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$.

On en déduit que $\boxed{U \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-1,1[\text{ et } U'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2(n^2+x^2)}{(x^2-n^2)^2}}$

3. a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f : t \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(xt)}{e^t - 1}$, qui est continue sur $]0,+\infty[$. On a $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{xt}{t} = x$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et intégrable sur $]0,1]$. D'autre part, si $x \geqslant 0$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{xt}}{2e^t} = \dfrac{1}{2}e^{-(1-x)t}$ donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $x < 1$. Par imparité de la fonction sh (pour traiter le cas $x \leqslant 0$), on en déduit que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $x \in]-1,1[$. Comme f est de signe fixe sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\varphi(x)$ existe si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{D_\varphi =]-1,1[}$

b) Pour $x \in]-1,1[$ <u>fixé</u> et $t > 0$, on a $|e^{-t}| < 1$ donc $\dfrac{1}{e^t-1} = \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$. On en déduit $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}(xt)e^{-(n+1)t}$. On pose alors $f_n(t) = \operatorname{sh}(xt)e^{-(n+1)t}$ et on applique le TITT :

H1 : $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme vu juste au dessus

H2 : les fonction f_n et f sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $f(t) = \dfrac{\operatorname{sh}(xt)}{e^t-1}$

H3 : $f_n(x) = \dfrac{e^{xt} - e^{-xt}}{2}e^{-(n+1)t} = \dfrac{1}{2}\left(e^{-(n+1-x)t} - e^{-(n+1+x)t}\right)$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $n+1-x > 0$ et $n+1+x > 0$ ($n \geqslant 0$ et $x \in]-1,1[$)

H4 : si $x \in [0,1[$, $f_n(t) \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(e^{-(n+1-x)t} - e^{-(n+1+x)t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1-x} - \frac{1}{n+1+x}\right)$ $= \dfrac{x}{(n+1)^2 - x^2} = -\dfrac{1}{2}u_{n+1}(x)$ donc $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. (le cas $x \in]-1,0]$ se traite de la même façon)

On en déduit $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}u_{n+1}(x)$ donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[, \varphi(x) = -\frac{1}{2}U(x)}$

4. a) On a $v_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{n^2-t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\ln|n^2-t^2|\Big]_0^x$ donc $\boxed{v_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)}$

b) Il s'agit de justifier que l'on peut intégrer terme à terme la série définissant U ; on pourrait le faire avec le TITT mais comme la convergence normale a déjà été prouvée, ça ira plus vite : on a

H1 : les fonctions u_n sont continues sur $[0,x]$.

H2 : La série $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[0,x]$ d'après **I.1** car $[0,x] \subset]-1,1[$.

On en déduit $\displaystyle\int_0^x u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ donc $\boxed{V(x) = \int_0^x U(t)\,\mathrm{d}t \text{ si } x \in [0,1[}$

5. a) Pour $x \in]0,1[$, on a $\ln\left(\frac{s_n(x)}{x}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = V_n(x)$ donc $\boxed{s_n(x) = xe^{V_n(x)} \text{ si } x \in [0,1]}$ car $s_n(0) = 0$.

b) Par continuité de exp, on a $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = xe^{V(x)}$ donc $\boxed{(s_n) \text{ converge simplement sur } [0,1[\text{ vers } s : x \mapsto xe^{V(x)}}$

Partie II

1. a) Pour éviter de diviser par x, on fait une première IPP sur $4x^2 I_n(x)$ en posant $u(t) = \cos^{2n} t$ et $v'(t) = 4x^2\cos(2xt)$, donc $v(t) = 2x\sin(2xt)$: u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc

$$4x^2 I_n(x) = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin(2xt) \times 2n\sin(t)\cos^{2n-1} t\,\mathrm{d}t$$

On recommence alors avec $u(t) = 2n\sin(t)\cos^{2n-1} t$ et $v'(t) = 2x\sin(2xt)$ donc $v(t) = -\cos(2xt)$ et $u'(t) = 2n\cos^{2n} t - 2n(2n-1)\sin^2 t\cos^{2n-2} t = 2n\cos^{2n} t - 2n(2n-1)(1-\cos^2 t)\cos^{2n-2} t = 2n\cos^{2n} t - (2n-1)\cos^{2n-2} t$; on a donc $4x^2 I_n(x) = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = 4n^2 I_n(x) - 2n(2n-1)I_{n-1}(x)$ qui donne le résultat.

b) Si $x = 0$, on en déduit $w_n = \frac{2n-1}{2n} w_{n-1}$ qui, avec $w_0 = \frac{\pi}{2}$, donne bien la valeur déjà vue plusieurs fois des intégrales de Wallis (par récurrence sur n par exemple).

Avec la formule de Stirling, on a ensuite $w_n \sim \dfrac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} \times \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{w_n \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$

c) Par récurrence sur n :

- pour $n = 1$, avec **II.1.a**, $s_1(x)I_1(x) = x(1-x^2)I_1(x) = \frac{x}{2}I_0(x) = \frac{x}{2}\int_0^{\frac{pi}{2}} \cos(2xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\Big[\sin(2xt)\Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\sin(\pi x)$ et $\frac{1}{\pi}w_1\sin(\pi x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{2}{4} \times \frac{\pi}{2}\sin(\pi x) = \frac{1}{4}\sin(\pi x)$
- si l'égalité est vérifiée au rang $n-1$ alors, avec **II.1.a**, on a $s_n(x)I_n(x) = s_{n-1}(x)\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)I_n(x) \overset{\textbf{II.1.a}}{=} s_{n-1}(x)\frac{2n-1}{2n}I_{n-1}(x) \overset{\text{HR}}{=} \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{\pi}w_{n-1}\sin(\pi x)$ qui donne la conclusion car $\frac{2n-1}{2n}w_{n-1} = w_n$.

2. a) i. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Taylor Lagrange à la fonction cos entre 0 et u en remarquant $|\cos''| = |\cos| \leqslant 1$; on peut aussi étudier la fonction $u \mapsto \frac{u^2}{2} - 1 + \cos u$.

ii. C'est une inégalité de concavité de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut aussi étudier $u \mapsto \sin u - \frac{2}{\pi}u$.

b) On a donc, avec $u = 2xt \in \mathbb{R}$, $1 - \cos(2xt) \leqslant \frac{(2xt)^2}{2} = 2x^2t^2$ puis, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $t^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin(t)$ car $\sin(t) \in [0,1]$. On en déduit $\boxed{1 - \cos(2xt) \leqslant \frac{\pi^2}{2}\sin(t)}$

c) On a $I_n(x) - w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2xt) - 1)\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$ donc $0 \leqslant \sqrt{n}(w_n - I_n(x)) \leqslant \frac{x^2\pi^2}{2}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2\pi^2}{2}\sqrt{n}\left[\frac{-\cos^{2n+1} t}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{x^2\pi^2\sqrt{n}}{2(2n+1)}$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(I_n(x) - w_n) = 0}$

3. Pour obtenir le développement eulérien du sin, il suffit de prouver que $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n(x)}{w_n} = 1$: on vient de prouver $I_n(x) - w_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o(w_n)$ car $w_n \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$, donc $I_n(x) \sim w_n$ ce qui donne la limite du quotient.

4. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ puis, avec **I.5.b** et l'unicité de la limite, $\frac{\sin(\pi x)}{\pi} = xe^{V(x)}$ donc, pour $x \in]0,1[$, $\boxed{V(x) = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)}$ Comme $U(x) = V'(x)$, on trouve $\boxed{U(x) = \pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} \text{ pour } x \in]0,1[}$

5. D'après **I.2.b**, on a $\zeta(2) = -\frac{1}{2}U'(0) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{U(x)}{x}$ et avec la valeur de U précédente, on trouve

$$\frac{U(x)}{x} \underset{0}{=} \frac{\pi x\left(1 - \frac{(\pi x)^2}{2}\right) - \left((\pi x) - \frac{(\pi x)^3}{6}\right) + o(x^3)}{x\sin(\pi x)} \sim \frac{-\frac{(\pi x)^3}{3}}{x^2(\pi x)} = -\frac{\pi^2}{3} \text{ ce qui donne } \boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}}$$

Problème II : (extrait de CCP PC 2010 Maths 1)

Partie I.A :

1. $\mathcal{X}_A(\lambda) = (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-8 & -4\\ 8 & \lambda+4\end{vmatrix} = (\lambda-1)\lambda(\lambda-4)$; $\mathcal{X}_A$ est scindé à racines simples donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$

2. $\begin{cases} E_0(A) = \text{Vect}\{(1,-2,0)\}\\ E_1(A) = \text{Vect}\{(1,0,1)\}\\ E_4(A) = \text{Vect}\{(1,-1,0)\}\end{cases}$. Si $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ alors $\boxed{A = PDP^{-1}}$

3. $\boxed{A^m = P\text{diag}(0,1,4^m)P^{-1}}$

4. On vérifie que M commute avec D si et seulement si M est diagonale (car D est diagonale avec des coefficients diagonaux 2 à 2 distincts).

5. Si $H^2 = D$ alors $HD = DH = H^3$ donc $\boxed{H \text{ et } D \text{ commutent}}$

6. On cherche donc H sous la forme $H = \text{diag}(x,y,z)$. $H^2 = D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0\\ y^2 = 1\\ z^2 = 4\end{cases}$ donc il existe 4 matrices H telles que $H^2 = D$ qui sont $H_1 = \text{diag}(0,1,2)$, $H_2 = \text{diag}(0,-1,2)$, $H_3 = -H_2$ et $H_4 = -H_1$.

On vérifie que $H^2 = D$ si et seulement si $\left(PHP^{-1}\right)^2 = A$ donc il existe 4 endomorphismes h tels que $h^2 = f$ dont les matrices dans la base canonique sont $\boxed{M_i = PH_iP^{-1} \text{ avec } i \in [\![1,4]\!]}$

Ces 4 endomorphismes sont bien distincts car $M \mapsto PMP^{-1}$ est bijective et les matrices H_i sont distinctes.

7. Pour M_i, on cherche un polynôme P_i tel que $P_i(A) = M_i \Leftrightarrow P_i(D) = H_i \Leftrightarrow \begin{cases} P_i(0) = 0\\ P_i(1) = \pm 1\\ P_1(4) = \pm 2\end{cases}$. De tels polynômes existent car $0,1,4$ sont trois réels distincts donc il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant chacune de ces conditions (interpolation de Lagrange).

Partie I.B :

1. On a $J^2 = 3J$ donc $\boxed{J^m = 3^{m-1}J}$ (récurrence)

2. Comme $f = id + j$ et comme id et j commutent, on a d'apres la formule du binome de Newton :
$f^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}j^k = id + \left(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}3^{m-1}\right)j = id + \frac{1}{3}\left((3+1)^m - 1\right)j$ donc $\boxed{f^m = id + \frac{1}{3}\left(4^m - 1\right)j}$
Pour $m = 0$ cette relation reste valable car elle redonne $f^0 = id$.

3. On a $(A - I_3)^2 = J^2 = 3J = 3(A - I_3)$ donc $X^2 - 5X + 4$ est annulateur de A. Comme $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ on en déduit que $\text{Sp}(A) \subset \{1,4\}$. Enfin, comme A est diagonalisable (car admet un polynôme annulateur scindé à racines simples) et n'est pas une matrice scalaire, A possède au moins 2 valeurs propres donc $\boxed{\text{Sp}(A) = \{1,4\}}$

4. Si p et q existent alors $id = p + q$ et $f = p + 4q$ donc $\boxed{q = \frac{1}{3}(f - id) = \frac{1}{3}j \text{ et } p = \frac{1}{3}(4id - f)}$ donc si p et q existent, ils sont uniques.

Réciproquement, pour p et q ainsi définis, on a $p + 4^m q = \frac{1}{3}(4id - f + 4^m j) = \frac{1}{3}(4id - f) + f^m - id + \frac{1}{3}j = f^m$ donc il existe bien un unique couple d'endomorphismes (p,q) tel que $f^m = p + 4^m q$ pour tout entier $m \geqslant 0$.

Les matrices de p et q ne sont pas proportionnelles donc $\boxed{(p,q) \text{ est libre}}$

5. En utilisant $f^2 - 5f + 4id = 0$, on obtient $\boxed{p^2 = p,\ q^2 = q \text{ et } p \circ q = q \circ p = 0}$

Si $h = \alpha p + \beta q$ alors $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$ donc $h^2 = f$ si et seulement si $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$ (en utilisant $f = p + 4q$ et la liberté de (p,q)). Il existe donc 4 endomorphismes $h \in \text{Vect}\{p,q\}$ tels que $h^2 = f$ qui sont $\boxed{h_1 = p + 2q = -h_2 \text{ et } h_3 = -p + 2q = -h_4}$

6. On a déjà vu que f est diagonalisable et $\text{Sp}(f) = \{1,4\}$. Si $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ alors $P^{-1}AP = \boxed{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} = D}$

puis $P' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{3}(4I_3 - D) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $Q' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \frac{1}{3}(D - I_3) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

7. $K = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

8. On vérifie que les matrices P', Q' et Y sont linéairement indépendantes donc l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est Y est tel que $h^2 = f$ et n'appartient pas à $\text{Vect}\{p, q\}$.

9. Si $h^2 = f$ alors $\big(h^2 - id\big) \circ \big(h^2 - 4id\big) = (f - id) \circ (f - 4id) = 0$ donc $(X^2-1)(X^2-4)$ est annulateur de h. Or $(X^2-1)(X^2-4) = (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$ est scindé à racines simples donc $\boxed{h \text{ est diagonalisable}}$

10. Pour l'endomorphisme h trouvé en **I.B.8**, on a $h \notin \mathbb{R}[F]$ car si on avait $h = R(f)$ pour $R \in \mathbb{R}$, on aurait $Y = R(D)$ donc Y serait diagonale ce qui n'est pas le cas. On a donc $\boxed{\mathcal{R}(f) \not\subset \mathbb{R}[f]}$

Partie II :

1. Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ alors $P(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_i^k\right) p_i$ donc $\boxed{P(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i}$

2. Avec $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$, on obtient $P(f) = 0$ donc $\boxed{\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(f - \lambda_i id) = 0}$ Comme P est un polynôme annulateur de f scindé à racines simples, $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$

3. $L_l(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} L_l(\lambda_i) p_i$, or $L_l(\lambda_i) = \delta_{i,l}$ donc $\boxed{L_l(f) = p_l}$

D'après **2.**, on a $(f - \lambda_l id) \circ L_f = 0$ donc $\boxed{\text{Im}(p_l) \subset \ker(f - \lambda_l id)}$

Enfin, comme $p_l \neq 0$, on a $\text{Im}(p_l) \neq \{0\}$ donc $\ker(f - \lambda_l id) \neq \{0\}$ et $\lambda_l \in \text{Sp}(f)$. Ceci étant valable pour tout $l \in [\![1, m]\!]$, on a $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subset \text{Sp}(f)$.

Réciproquement, comme $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$ est annulateur de f, on a $\text{Sp}(f) \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ donc $\boxed{\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}}$

4. Si $i \neq j$ alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X - \lambda_k)$ divise $L_i L_j$ donc $\boxed{p_i \circ p_j = 0}$ puis comme $id = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} p_k$, on a, en composant par p_i, $p_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} p_i \circ p_k = p_i^2$ donc $\boxed{p_i \text{ est un projecteur}}$

5. Si $\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_m p_m = 0$ alors en composant par p_k, on a $\alpha_k p_k = 0$ donc $\alpha_k = 0$ (car $p_k \neq 0$) donc $(p_1, \ldots, p_m)$ est une famille libre et $\boxed{\dim F = m}$

6. $(\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_m p_m)^2 = f \Leftrightarrow \alpha_1^2 p_1 + \cdots + \alpha_m^2 p_m = f \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, m]\!], \alpha_k^2 = \lambda_k$ car la famille $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre. Ainsi $\boxed{\mathcal{R}(f) \cap F = \left\{\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_m p_m, \forall k \in [\![1, m]\!], \alpha_k \in \left\{\pm\sqrt{\lambda_k}\right\}\right\}}$

7. a) Si f admet n valeurs propres distinctes alors elles sont simples donc $\boxed{\text{les espaces propres sont des droites}}$

b) Si $h^2 = f$ alors h et f commutent $(h \circ f = h^3 = f \circ h)$ donc tous les espaces propres de f sont stables par h. Si x est un vecteur propre associé à $\lambda \in \text{Sp}(f)$ alors $x \neq 0$ et $E_\lambda(f)$ est une droite donc x est une base de $E_\lambda(f)$. On a alors $h(x) \in E_\lambda(f)$ donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = \mu x$ donc $\boxed{x \text{ est un vecteur propre de } h}$

c) Si $h \in \mathcal{R}(f)$ et si $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de f, $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de h donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \text{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ donc on vérifie que $h = \mu_1 p_1 + \cdots + \mu_n p_n$ donc $\boxed{\mathcal{R}(f) \subset F}$

Le raisonnement de la question **6.** montre que $\boxed{\mathcal{R}(f) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k \geqslant 0}$

8. Si $m < n$ alors f admet une valeur propre λ_k multiple donc un espace propre de dimension $\geqslant 2$. On peut alors, comme dans la partie II, construire une matrice K non diagonale telle que $K^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_k)$, où $\mathcal{B}$ est une base de diagonalisation de f. Si $K = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p'_k)$ et si on pose $h = \displaystyle\sum_{i \neq k} \sqrt{\lambda_i} p_i + \sqrt{\lambda_k} p'_k$, on obtient un endomorphisme n'appartenant pas à F tel que $h^2 = f$. Ainsi, on a bien $\boxed{\mathcal{R}(f) \not\subset F}$

9. Si $n = m$ alors on a vu $\mathcal{R}(f) \subset F$ et comme $p_i \in \mathbb{R}[f]$, on a bien $\boxed{\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}[f]}$

Il s'agirait de trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], P(\lambda_i) = \pm\sqrt{\lambda_i}$ ce qui est possible dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par interpolation de Lagrange puisque les λ_i sont deux à deux distincts. Si un des λ_i est < 0 alors on a $\mathcal{R}(f) = \emptyset$ donc on a bien $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}[f]$ aussi.