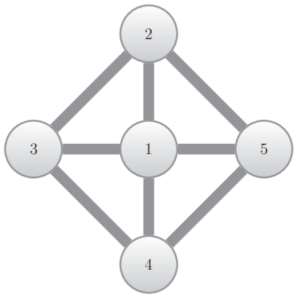
PSI2 **DM11** pour le 8 janvier 2024

(d'après Mines-Ponts PSI 2017 maths 1)

Marche aléatoire dans un labyrinthe

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ ($k \in \mathbb{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant k ($k \in \mathbb{N}$) dans la salle numéro i ($1 \leqslant i \leqslant 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k. À titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = P(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = P(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice-colonne $X_k = \begin{pmatrix} P(S_k = 1) \\ P(S_k = 2) \\ P(S_k = 3) \\ P(S_k = 4) \\ P(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

On rappelle que $(S_k = 3)$ *est une notation pour l'événement « le rat est dans la salle 3 à l'instant* k *» et* $P(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = P_{(S_k=2)}(S_{k+1} = 1)$ *est la probabilité de* $(S_{k+1} = 1)$ *sachant* $(S_k = 2)$.

I Premiers pas

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(P(S_k = i),\ i = 1, \dots, 5)$.
2. Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout k entier naturel.
3. En observant les colonnes de la matrice B, montrer que le réel 1 est valeur propre de B^T et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par $X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}$.

4. Montrer qu'alors les variables aléatoires S_k ont toutes la même loi.
5. Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?

II Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note

$$\|M\|_\infty = \max_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} |m_{i,j}|$$

Si X est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$, on a donc $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

Si $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, donc une famille de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les $n \times p$ coefficients dépendent de l'entier k, on dira que la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $L = (\ell_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ si

$$\lim_{k \to +\infty} \|M_k - L\|_\infty = 0$$

et on admet que cette définition équivaut à la convergence, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, des suites réelles $m_{i,j}(k)$ vers $\ell_{i,j}$, où $m_{i,j}(k)$ désigne le coefficient d'indice (i,j) de la matrice M_k.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}), \tag{2}$$

où I_n est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $X \in \ker(A - I_n)$. Déterminer $R_k X$.

2. Soit $X \in \mathrm{Im}(A - I_n)$. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} R_k X = 0$.

3. En déduire que $\mathbb{R}^n = \ker(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n)$.

4. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(R_k X)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de $\mathbb{R}^n$, que l'on notera $p(X)$. Interpréter géométriquement l'application $p\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ainsi définie.

5. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.

III Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.
Définition 1 *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0\ ; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

1. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

2. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

3. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les questions de la fin de cette partie, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

4. Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
Indication : soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in [\![1,n]\!]$ un indice tel que $x_s = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

5. En déduire que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

6. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.

7. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, stochastique, de rang 1.

8. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice-ligne stochastique.

9. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

10. Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.

11. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de A. *On pourra utiliser le résultat de la question* **II.3**.

IV Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie I en exploitant les résultats de la partie III.
On pose $A = B^T$ où B est la matrice construite dans la partie I.
Un calcul, qui n'est pas demandé, montre que les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs.

1. Expliciter la limite P de la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie en (2).

2. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1,5]\!]$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants k, $k \in \mathbb{N}$).