Correction du DM11

(d'après Mines-Ponts PSI 2017 maths 1)

Partie I

1. $(S_k = i)_{i\in[\![1,5]\!]}$ est un système complet d'événements donc $P(S_{k+1} = 1) = P_{(S_k=1)}(S_{k+1} = 1)P(S_k = 1) + P_{(S_k=2)}(S_{k+1} = 1)P(S_k = 2) + P_{(S_k=3)}(S_{k+1} = 1)P(S_k = 3) + P_{(S_k=4)}(S_{k+1} = 1)P(S_k = 4) + P_{(S_k=5)}(S_{k+1} = 1)P(S_k = 5) = \dfrac{1}{3}(P(S_k = 2) + P(S_k = 3) + P(S_k = 4) + P(S_k = 5))$

2. En faisant de même pour $P(S_{k+1} = i)$, $i \in [\![2, 5]\!]$, on trouve $\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}}$

3. La somme des termes de chaque colonne vaut 1 donc $B^T U = U$ (où U est le vecteur colonne introduit dans la partie III) et comme $U \neq 0$, on a $\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(U^T) = \mathrm{Sp}(U)}$

4. On vérifie par récurrence sur k que $X_k = X_0$ car $BX_0 = X_0$

5. On a $P(S_0 = 1, S_1 = 1) = 0$ alors que $P(S_0 = 1)P(S_1 = 1) \neq 0$ donc $\boxed{S_0 \text{ et } S_1 \text{ ne sont pas indépendantes}}$

Partie II

1. Comme $AX = X$, on trouve $\boxed{R_k X = X}$

2. Si on écrit $X = AY - Y$ alors on a $R_k X = \dfrac{1}{k}(A^k Y - Y)$ donc $\|R_k X\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{k}(\|A^k Y\|_\infty + \|Y\|_\infty)$. On vérifie ensuite, avec l'hypothèse faite sur A que $\|A^k Y\|_\infty \leqslant \|A^{k-1} Y\|_\infty$ donc $\|A^k Y\|_\infty \leqslant \|Y\|_\infty$. On en déduit $\|R_k X\|_\infty \leqslant \dfrac{2}{k}\|Y\|_\infty \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{\lim_{k\to+\infty} R_k X = 0}$

3. Si $X \in \ker(A - I_n) \cap \mathrm{Im}(A - I_n)$ alors on a $X = R_k X \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $X = 0$. Avec le théorème du rang, on a $\dim(\ker(A - I_n)) + \dim(\mathrm{Im}(A - I_n)) = n$ donc $\boxed{R^n = \ker(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n)}$

4. On décompose $X \in \mathbb{R}^n$ en $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in \ker(A - I_n)$ et $X_2 \in \mathrm{Im}(A - I_n)$. On a alors $R_k X = R_k X_1 + R_k X_2 = X_1 + R_k X_2$ puis $\|R_k X - X_1\|_\infty = \|R_k X_2\|_\infty \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ d'après **II.2**. On a donc $\boxed{\lim_{k\to+\infty} R_k X = X_1}$

On a donc $p(X) = X_1$ qui est la projection du vecteur X sur $\ker(A - I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A - I_n)$.

5. Soit $P = (p_{i,j})$ la matrice de la projection sur $\ker(A - I_n)$, parallèlement à $\mathrm{Im}(A - I_n)$, on vient de voir que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{k\to+\infty} R_k X = PX$. Si on choisit $X = E_i$ (le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$), on a $R_k E_i \xrightarrow[k\to+\infty]{} PE_i$ donc les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ colonne de R_k tendent vers ceux de la $i^{\text{ème}}$ colonne de P ce qui signifie que (R_k) tend vers P. Comme P est une matrice de projecteur, on a bien $P^2 = P$.

Partie III

1. $(AU)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ donc (4) équivaut à $(AU)_i = 1 = U_i$, pour $i \in [\![1, n]\!]$, donc à $AU = U$

2. Si $A, B \in \mathcal{E}$ alors $(AB)U = A(BU) = AU = U$ donc AB vérifie (4). De plus $(AB)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \geqslant 0$ donc AB vérifie (3) et $\boxed{AB \in \mathcal{E}}$

3. Si $k \in [\![1, n]\!]$, $|(AX)_k| = \left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j\right| \overset{(3)}{\leqslant} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{j,k}\|X\|_\infty \overset{(4)}{=} \|X\|_\infty$. Donc $\boxed{\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty}$

4. Soit $X \in \ker(A^p - I_n)$ et s tel que $|x_s| = \|X\|_\infty$; quitte à changer X en $-X$, on peut supposer $x_s \geqslant 0$ et on a donc $x_s = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j|$. On a aussi $X = A^p X$ et $A^p \in \mathcal{E}$ d'après **III.2** donc, avec $A^p = (b_{i,j})$, en reprenant les inégalités de la question précédente, $x_s = \|A^p X\|_\infty = \left|\displaystyle\sum_{j=1} b_{s,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{s,j}|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{s,j} x_s = x_s$. Toutes les inégalités intermédiaires sont donc des égalités. On a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{s,j}|x_j| = \sum_{j=1}^{n} b_{s,j} x_s$ donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{s,j}(x_s - |x_j|) = 0$ et comme $b_{s,j}(|x_s - |x_j|) \geqslant 0$, on a $\forall j \in [\![1, n]\!]\,, b_{s,j}(x_s - |x_j|) = 0$; on a supposé $b_{s,j} > 0$ donc $x_s = |x_j|$. De même on a

$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{s,j}x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{s,j}|x_j|$ donc (caractérisation de l'égalité dans l'inégalité triangulaire, ou de Minkowski), tous les réels $a_{s,j}x_j$ sont de même signe; comme $a_{s,s}x_s \geqslant 0$, on a $a_{s,j}x_j \geqslant 0$ et, avec $a_{s,j} > 0$, on en déduit $x_j \geqslant 0$. Finalement, on a $x_s = x_j$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, ie $X = x_s U$ et $\ker(A^p - I_n) \subset \mathrm{Vect}\{U\}$. Réciproquement $AU = U$ donc $A^p U = U$ et $\boxed{\ker(A^p - I_n) = \mathrm{Vect}\{U\}}$

5. Comme $AX = X \Rightarrow A^p X = X$, on a $\ker(A - I_n) \subset \ker(A^p - I_n) = \mathrm{Vect}\{U\}$ et réciproquement $AU = U$ donc $\boxed{\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}\{U\}}$

6. Les matrices A^l sont stochastiques d'après **III.2**. On vérifie aussi $R_k U = U$ donc R_k vérifie (4). Comme, par somme de coefficients positifs, les coefficients de R_k restent positifs, $\boxed{R_k \in \mathcal{E}}$

7. On peut appliquer la partie **II** à la matrice A (d'après **III.3**) donc (R_k) converge vers la matrice P du projecteur sur $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}\{U\}$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A - I_n)$ donc telle que $\boxed{P^2 = P \text{ et } \mathrm{rg}(P) = 1}$

8. Si C_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de P, on a $C_j \in \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}\{U\}$ (car $PU = U \in \mathrm{Im}(P)$) donc il existe λ_i tel que $C_j = \lambda_j U$. Ceci donne bien $\boxed{P = UL}$ avec $L = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$
Par passage à la limite, les coefficients de R_k étant strictement positifs, ceux de P sont positifs ou nuls donc les λ_i sont $\geqslant 0$. On a $PU = U$ donc $U(LU) = U$ et $LU \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc $(LU)U = U$ puis $\underbrace{(LU - 1)}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{U}_{\neq 0} = 0$, ce qui donne $LU = 1$ donc $\boxed{L \text{ est stochastique}}$

9. On a $R_k A = R_k + \dfrac{1}{k}(A^k - I_n)$ donc, pour $X \in \mathbb{R}^n$ quelconque, $R_k AX = R_k X + \dfrac{1}{k}(A^k X - X)$ puis $\|A^k X - X\|_\infty \leqslant \|A^k X\|_\infty + \|X\|_\infty \leqslant 2\|X\|_\infty$ et $\|R_k AX - R_k X\|_\infty \leqslant \dfrac{2\|X\|_\infty}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ ce qui donne $\lim\limits_{k\to+\infty} R_k AX - R_k X = 0$. Ceci donne, avec la preuve faite en **II.5**, $\lim\limits_{k\to+\infty} R_k A - R_k = 0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} R_k A = P$. Reste à justifier $\lim\limits_{k\to+\infty} R_k A = PA$:
$(R_k A)_{i,j} = \sum_{h=1}^{n} (R_k)_{i,h} a_{h,j} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sum_{h=1}^{n} p_{i,h} a_{h,j} = (AP)_{i,j}$. On déduit de ces calculs $\boxed{PA = P}$
On a donc $(UL)A = UL$, ou $U(LA - L) = 0$; comme tous les coefficients de U valent 1, la première ligne du produit $U(LA - L) = 0$ impose $LA - L = 0$.
Reste l'unicité d'une telle matrice ligne stochastique : si $L'A = L'$ avec L' stochastique alors $A^T(L')^T = (L')^T$ donc $(L')^T$ est un vecteur propre de A^T associé à la valeur propre 1; mais $\dim(E_1(A^T)) = \dim(E_1(A)) = 1$ et $L \in E_1(A^T)$ donc $E_1(A^T) = \mathrm{Vect}\{L^T\}$ et $L' = \alpha L$. Comme L' est stochastique (et L aussi), on a $\alpha = 1$ donc $L' = L$ est unique.

10. Comme $LA = L$, on a $LA^p = L$. Si on suppose $l_i = 0$ alors, avec $b_{i,j}$ les coefficients de A^p, on a $0 = (LA^p)_i = \sum_{j=1}^{n} l_j b_{j,i}$ donc $l_j b_{j,i} = 0$ pour tout j car $l_l b_{j,i} \geqslant 0$; comme $b_{j,i} > 0$, on aurait $l_j = 0$ pour tout j ce qui est absurde car L est stochastique.

11. Si B est une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = E_1(A) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n)$ et $Q = P(\mathcal{B}_c \to \mathcal{B})$ alors $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & A'\end{pmatrix}$ (car $E_1(A)$ est de dimension 1 d'après **III.5** et $\mathrm{Im}(A - I_n)$ est stable par A). On a alors $\mathcal{X}_A = (X - 1)\mathcal{X}_{A'}$. Si 1 était valeur propre multiple de A alors 1 serait valeur propre de A' donc il existerait $X \neq 0$, $X \in \mathrm{Im}(A - I_n)$ tel que $AX = A'X = X$ ce qui est absurde car on aurait $X \in E_1(A) \cap \mathrm{Im}(A - I_n) = \{0\}$.

Partie IV

1. D'après **III.8** et **III.9**, on a $P = UL$ avec L la seule ligne stochastique telle que $LA = L$ donc $BL^T = L^T$. Comme on a remarqué $BX_0 = X_0$ avec X_0 donné dans la partie **I** et X_0^T est stochastique, on a $L = X_0^T$. On a donc

$$\boxed{P = UL = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}4 & 3 & 3 & 3 & 3\\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3\\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3\\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3\\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3\end{pmatrix}}$$

2. On cherche Y_0 de sorte que $Y_{k+1} = Y_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On doit donc avoir $Y_0 = Y_1 = BY_0$ et $Y_0 \neq 0$. Comme on a vu que $E_1(B)$ est une droite d'après **III.5**, engendrée par le vecteur X_0 donné dans la partie **I**, on a $E_1(B) = \mathrm{Vect}\{X_0\}$ donc la seule possibilité pour Y_0, qui doit être stochastique, est $Y_0 = X_0$.